

1.

(1)

$A \cap B$  のとき、全て表もしくは全て裏でなければよいので、

$$P(A \cap B) = 1 - p^3 - (1-p)^3 = 1 - p^3 - 1 + 3p - 3p^2 + p^3 = 3p(1-p)$$

となる。 $A \cup B$  のとき、全て裏でなければよいので、

$$P(A \cup B) = 1 - (1-p)^3 = 3p - 3p^2 + p^3 = p(3 - 3p + p^2)$$

となる。 $\bar{A} \cap B$  のとき、全て表であればよいので、

$$P(\bar{A} \cap B) = p^3$$

となる。

$$(\text{答}) \quad P(A \cap B) = 3p(1-p), P(A \cup B) = p(3 - 3p + p^2), P(\bar{A} \cap B) = p^3$$

(2)

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

であるから、 $\overline{A \cup B}$  は、

「裏と表のうち一方のみが出て、表はでない」

すなわち

「裏のみが出る」

を表す。(1)より、 $A \cap B$  は「全て裏もしくは全て表以外」を表しているから、 $(A \cap B) \cup (\overline{A \cup B})$

は、

「全て表となる場合以外」

を表す。したがって、その確率は、

$$P((A \cap B) \cup (\overline{A \cup B})) = 1 - p^3$$

となる。

$$(\text{答}) \quad P((A \cap B) \cup (\overline{A \cup B})) = 1 - p^3$$

(3)

表が出る数が1枚の時の確率は、

$${}_3C_1 p(1-p)^2$$

であり、2枚の時の確率は、

$${}_3C_2 p^2(1-p)$$

であり、3枚の時の確率は、

$$p^3$$

であるから、得点の期待値は、

$$3k \cdot p^3 + 2k \cdot 3p^2(1-p) + k \cdot 3p(1-p)^2 = 3kp$$

となる。これが  $6p$  に等しいので、

$$k = 2$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad k = 2$$

2.

(1)

$y' = 2x$  であるから、直線  $\ell$  の傾きを  $m$  とすると、

$$\begin{aligned} 2a \cdot m &= -1 \\ \therefore m &= -\frac{1}{2a} \end{aligned}$$

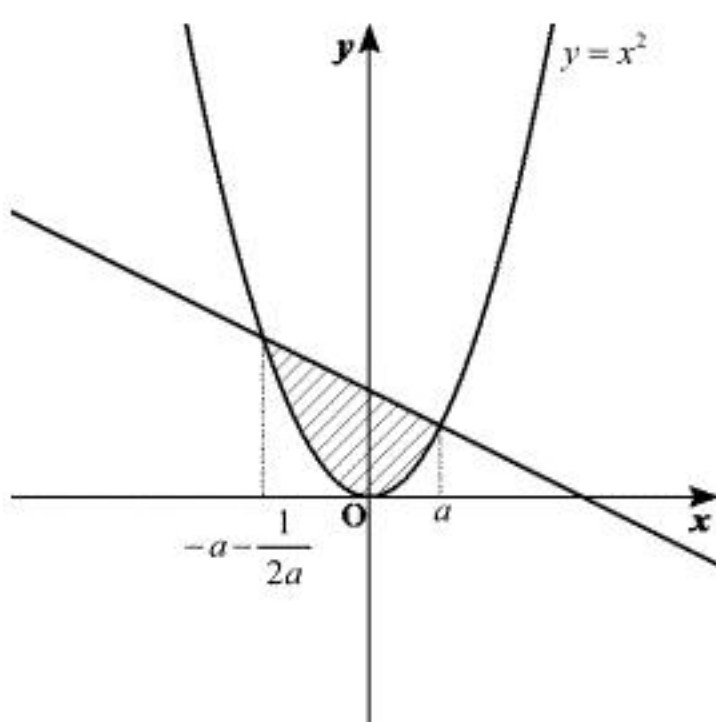
である。したがって、直線  $\ell$  の方程式は、

$$\ell: y = -\frac{1}{2a}(x-a) + a^2 = -\frac{1}{2a}x + a^2 + \frac{1}{2}$$

と求まる。直線  $\ell$  と曲線  $C$  の交点の  $x$  座標は、

$$\begin{aligned} x^2 &= -\frac{1}{2a}x + a^2 + \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow x^2 + \frac{1}{2a}x - a^2 - \frac{1}{2} &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-a)\left(x + a + \frac{1}{2a}\right) &= 0 \\ \therefore x &= a, -a - \frac{1}{2a} \end{aligned}$$

と求まる。



求めるのは前図斜線部の面積であり、それは、

$$\begin{aligned} S &= \int_{-a-\frac{1}{2a}}^a \left\{ \left( -\frac{1}{2a}x + a^2 + \frac{1}{2} \right) - x^2 \right\} dx \\ &= \frac{1}{6} \left( a + a + \frac{1}{2a} \right)^3 \\ &= \frac{1}{6} \left( 2a + \frac{1}{2a} \right)^3 \end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad \frac{1}{6} \left( 2a + \frac{1}{2a} \right)^3$$

(2)

点  $A\left(-a - \frac{1}{2a}, \left(a + \frac{1}{2a}\right)^2\right)$ ,  $B(a, a^2)$  とおく。点  $A, B$  における曲線  $C$  の接線を  $\ell_A, \ell_B$  とおく

と、

$$\begin{aligned} \ell_A: y &= 2\left(-a - \frac{1}{2a}\right)\left(x + a + \frac{1}{2a}\right) + \left(a + \frac{1}{2a}\right)^2 \\ &= -2\left(a + \frac{1}{2a}\right)x - \left(a + \frac{1}{2a}\right)^2 \\ \ell_B: y &= 2a(x-a) + a^2 = 2ax - a^2 \end{aligned}$$

となるので、点  $P$  の  $x$  座標は、

$$\begin{aligned} -2\left(a + \frac{1}{2a}\right)x - \left(a + \frac{1}{2a}\right)^2 &= 2ax - a^2 \\ \Leftrightarrow \left(4a + \frac{1}{a}\right)x &= -\left(\frac{1+4a^2}{4a^2}\right) \\ \therefore x &= -\frac{1}{4a} \end{aligned}$$

と求まる。以上より、点  $P$  の座標は、

$$P\left(-\frac{1}{4a}, -a^2 - \frac{1}{2}\right)$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad P\left(-\frac{1}{4a}, -a^2 - \frac{1}{2}\right)$$

3.

(1)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP_{3n}} &= (1 + p^3 + \cdots + p^{3(n-1)})\overrightarrow{OA} + (p + p^4 + \cdots + p^{3(n-1)+1})\overrightarrow{AB} \\ &\quad + (p^2 + p^5 + \cdots + p^{3(n-1)+2})\overrightarrow{BO} \\ &= (1 + p^3 + \cdots + p^{3(n-1)})\left(\overrightarrow{OA} + p\overrightarrow{AB} + p^2\overrightarrow{BO}\right) \\ &= \frac{1-p^{3n}}{1-p^3}\left\{(1-p)\overrightarrow{OA} + p(1-p)\overrightarrow{OB}\right\} \\ &= \frac{1-p^{3n}}{1+p+p^2}\left(\overrightarrow{OA} + p\overrightarrow{OB}\right)\end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{OP_{3n}} = \frac{1-p^{3n}}{1+p+p^2}\left(\overrightarrow{OA} + p\overrightarrow{OB}\right)$$

(2)

$$\overrightarrow{OP} = \lim_{n \rightarrow \infty} \overrightarrow{OP_{3n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-p^{3n}}{1+p+p^2}\left(\overrightarrow{OA} + p\overrightarrow{OB}\right) = \frac{1}{1+p+p^2}\left(\overrightarrow{OA} + p\overrightarrow{OB}\right)$$

であるから、

$$\overrightarrow{OP} = \frac{1+p}{1+p+p^2}\left(\frac{1}{1+p}\overrightarrow{OA} + \frac{p}{1+p}\overrightarrow{OB}\right)$$

と変形できる。したがって、直線 OP と AB の交点が Q であるから、

$$\overrightarrow{OQ} = \left(\frac{1}{1+p}\overrightarrow{OA} + \frac{p}{1+p}\overrightarrow{OB}\right)$$

と表せる。したがって、点 Q は線分 AB を  $p:1$  に内分する。

(答)  $p:1$

(3)

(2)より、

$$\overrightarrow{OP} = \frac{1+p}{1+p+p^2}\overrightarrow{OQ}$$

であるから、

$$\overrightarrow{PQ} = \left(1 - \frac{1+p}{1+p+p^2}\right)\overrightarrow{OQ} = \frac{p^2}{1+p+p^2}\overrightarrow{OQ}$$

となる。したがって、点 P は OQ を  $1+p:p^2$  に内分した点である。

(答)  $1+p:p^2$

4.

(1)

$$\begin{aligned}x &= 2(1 + \cos t) \cos t \\&= 2(\cos^2 t + \cos t) \\&= 2 \left\{ \left( \cos t + \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{4} \right\}\end{aligned}$$

となるので、 $-1 \leq \cos \theta \leq 1$  とから、 $\cos t = 1$ 、すなわち  $t = 0, 2\pi$  のとき最大値 4 をとり、

$\cos t = -\frac{1}{2}$ 、すなわち  $t = \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi$  のとき最小値  $-\frac{1}{2}$  となる。

(答) 最大値: 4, 最小値:  $-\frac{1}{2}$

(2)

$$\frac{dx}{dt} = -2 \sin t \cos t - 2(1 + \cos t) \sin t = -2 \sin t (2 \cos t + 1)$$

と求まる。

(答)  $\frac{dx}{dt} = -2 \sin t (2 \cos t + 1)$

(3)

$$\begin{cases} f(t) = 2(1 + \cos t) \cos t \\ g(t) = 2(1 + \cos t) \sin t \end{cases}$$

とおくと、

$$\begin{cases} f(2\pi - t) = 2(1 + \cos(2\pi - t)) \cos(2\pi - t) = 2(1 + \cos t) \cos t = f(t) \\ g(2\pi - t) = 2(1 + \cos(2\pi - t)) \sin(2\pi - t) = -2(1 + \cos t) \sin t = -g(t) \end{cases}$$

となるので、 $0 \leq t \leq 2\pi$  のとき  $(x, y) = (f(t), g(t))$  で表される曲線は  $x$  軸対称となる。したが

って、求める体積は  $x$  軸より上の部分、すなわち  $0 \leq t \leq \pi$  の部分を  $x$  軸を中心に回転させたものである。(1), (2)より、 $x$  の増減表は次のとおりである。

|                 |   |            |                  |            |       |
|-----------------|---|------------|------------------|------------|-------|
| $t$             | 0 | ...        | $\frac{2}{3}\pi$ | ...        | $\pi$ |
| $\frac{dx}{dt}$ | 0 | -          | 0                | +          | 0     |
| $x$             | 4 | $\searrow$ | $-\frac{1}{2}$   | $\nearrow$ | 0     |

したがって、与えられた図より、求める体積を  $V$  とすると、

$$\begin{aligned}V &= \pi \int_{t=\frac{2}{3}\pi}^{t=0} y^2 dx - \pi \int_{t=\frac{2}{3}\pi}^{t=\pi} y^2 dx \\&= -\pi \int_{t=0}^{t=\pi} y^2 dx \\&= -\pi \int_0^\pi 4(1 + \cos t)^2 \sin^2 t \cdot (-2 \sin t)(2 \cos t + 1) dt \\&= 8\pi \int_0^\pi \sin^3 t (1 + \cos t)^2 (2 \cos t + 1) dt \\&= 8\pi \int_0^\pi \sin t (1 - \cos^2 t) (1 + \cos t)^2 (2 \cos t + 1) dt\end{aligned}$$

となる。ここで、 $\cos t = u$  とおくと、

$$du = -\sin t dt$$

|     |                     |
|-----|---------------------|
| $u$ | $1 \rightarrow -1$  |
| $t$ | $0 \rightarrow \pi$ |

となるから、

$$\begin{aligned}V &= 8\pi \int_1^{-1} -(1 - u^2)(1 + u)^2 (1 + 2u) du \\&= 8\pi \int_{-1}^1 (1 + 4u + 4u^2 - 2u^3 - 5u^4 - 2u^5) du \\&= 16\pi \int_0^1 (1 + 4u^2 - 5u^4) du \\&= 16\pi \left[ u + \frac{4}{3}u^3 - u^5 \right]_0^1 \\&= \frac{64}{3}\pi\end{aligned}$$

である。

(答)  $V = \frac{64}{3}\pi$