

1.

(1)

直線 l と放物線 C が接する条件は、2つの図形の方程式から y を消去して得られる方程式

$$\begin{aligned} -2x \log_2 a &= x^2 + b^2 \\ \Leftrightarrow x^2 + (2 \log_2 a)x + b^2 &= 0 \end{aligned}$$

が重解を持つことである。ここで、2次方程式 $x^2 + (2 \log_2 a)x + b^2 = 0$ の判別式を D とおくと、条件は

$$\begin{aligned} D &= 0 \\ \Leftrightarrow (\log_2 a)^2 - b^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow \log_2 a &= \pm b \\ \Leftrightarrow a &= 2^{\pm b} \end{aligned}$$

となる。 $b = \log_3 5$ であるため、 $a = 2^{\pm \log_3 5}$ である。

(答) $a = 2^{\pm \log_3 5}$

また、

$$\begin{aligned} 3 - a &= 2^{\log_2 3} - 2^{\pm \log_3 5} \\ &\geq 2^{\log_2 3} - 2^{\log_3 5} \quad (\because \log_3 5 > 0) \end{aligned}$$

であるから、一般に関数 2^x が単調増加であることを考慮すると、 $a < 3$ であることを示すためには $\log_3 5 < \log_2 3$ を示せば十分である。ここで、

$$\begin{aligned} \log_2 3 - \log_3 5 &= \frac{\log_{10} 3}{\log_{10} 2} - \frac{\log_{10} 5}{\log_{10} 3} \\ &= \frac{(\log_{10} 3)^2 - (\log_{10} 2)(\log_{10} 5)}{(\log_{10} 2)(\log_{10} 3)} \\ &= \frac{(\log_{10} 3)^2 - (\log_{10} 2)(1 - \log_{10} 2)}{(\log_{10} 2)(\log_{10} 3)} \\ &= \frac{0.4771^2 - 0.3010 \times (1 - 0.3010)}{(\log_{10} 2)(\log_{10} 3)} \\ &= \frac{0.22762441 - 0.210399}{(\log_{10} 2)(\log_{10} 3)} \\ &> 0 \end{aligned}$$

であり、 $\log_3 5 < \log_2 3$ が成立するため、 $a < 3$ であることが示された。

(証明終)

(2)

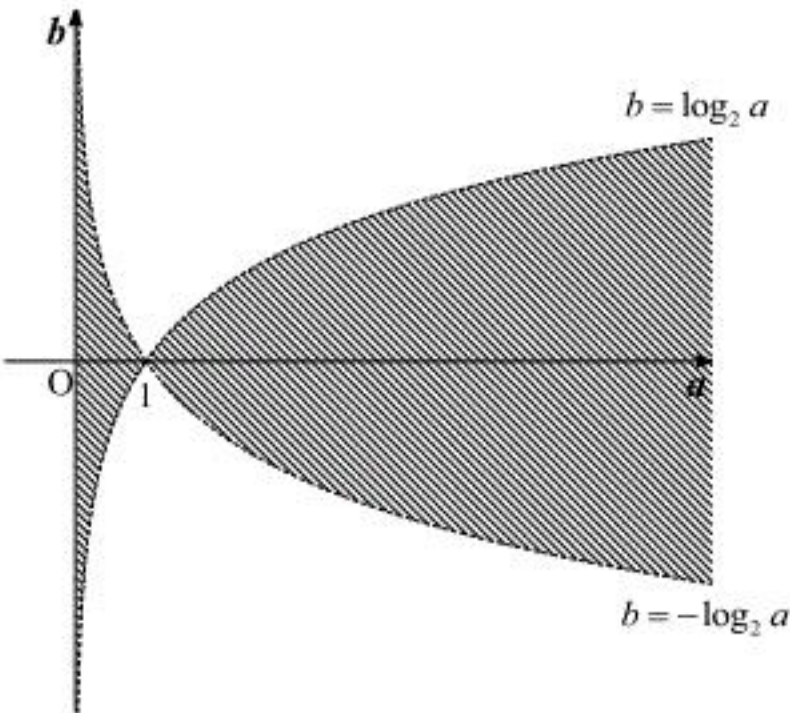
直線 l と放物線 C が異なる2点で交わる条件は、方程式

$$x^2 + (2 \log_2 a)x + b^2 = 0$$

が異なる2つの実数解を持つことである。よって条件は

$$\begin{aligned} D &> 0 \\ \Leftrightarrow (\log_2 a)^2 - b^2 &> 0 \\ \Leftrightarrow (b - \log_2 a)(b + \log_2 a) &< 0 \\ \Leftrightarrow (b - \log_2 a > 0 \text{ かつ } b + \log_2 a < 0) \text{ または } (b - \log_2 a < 0 \text{ かつ } b + \log_2 a > 0) \\ \Leftrightarrow \log_2 a < b < -\log_2 a \text{ または } -\log_2 a < b < \log_2 a \end{aligned}$$

である。この条件を ab 平面上に図示すると以下の図のようになる。ただし境界は除く。



(答) 条件： $\log_2 a < b < -\log_2 a$ または $-\log_2 a < b < \log_2 a$ ，図：前図

2.

(1)

2点 $A(a, a^2)$, $B(b, b^2)$ を通る直線の方程式は、 $a-b>0$ であるから、

$$y-a^2 = \frac{a^2-b^2}{a-b}(x-a)$$

$$y-a^2 = (a+b)(x-a)$$

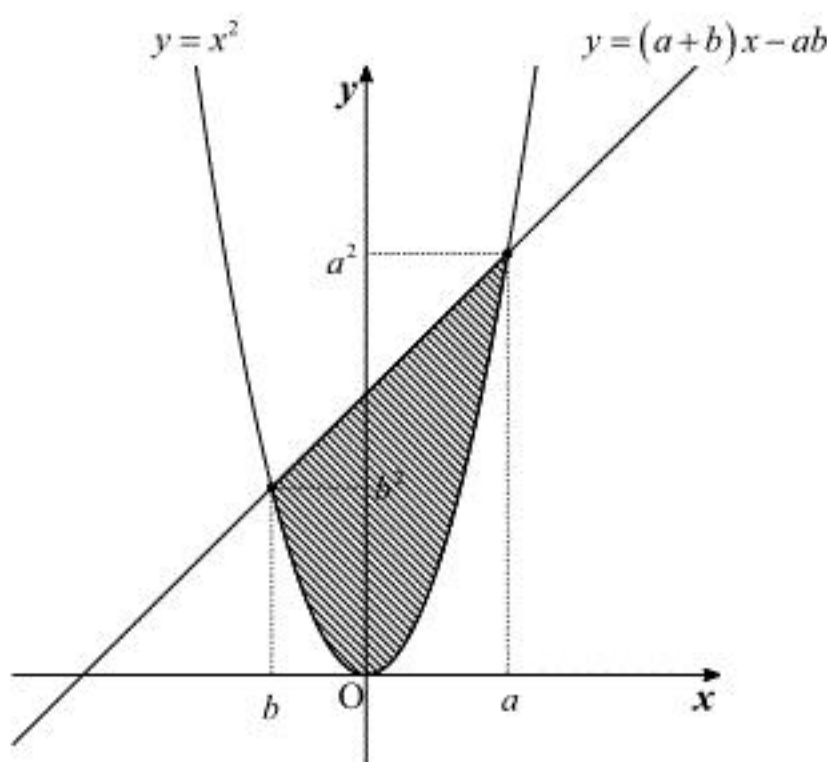
$$y = (a+b)x - ab$$

である。

$$(答) \quad y = (a+b)x - ab$$

(2)

直線 AB と放物線 $y=x^2$ で囲まれる領域は、以下の図の斜線部のようになる。



したがって、この領域の面積は、

$$\begin{aligned} S &= \int_b^a \{(a+b)x - ab - x^2\} dx \\ &= \left[\frac{1}{2}(a+b)x^2 - abx - \frac{1}{3}x^3 \right]_b^a \\ &= \frac{1}{2}(a+b)(a^2 - b^2) - ab(a-b) - \frac{1}{3}(a^3 - b^3) \\ &= \frac{1}{6}(a-b) \{ 3(a+b)^2 - 6ab - 2(a^2 + ab + b^2) \} \\ &= \frac{1}{6}(a-b)(a^2 - 2ab + b^2) \\ &= \frac{1}{6}(a-b)^3 \end{aligned}$$

である。

(証明終)

(3)

(2)の結果を用いると、

$$\begin{aligned} S &= \frac{4}{3} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{6}(a-b)^3 &= \frac{4}{3} \\ \Leftrightarrow (a-b)^3 &= 8 \\ \Leftrightarrow a-b &= 2 \quad (\because a-b \text{ は実数}) \\ \Leftrightarrow b &= a-2 \end{aligned}$$

が導かれる。ここで、線分 AB の長さ $\sqrt{(a-b)^2 + (a^2-b^2)^2}$ から b を消去すると、

$$\begin{aligned} \sqrt{(a-b)^2 + (a^2-b^2)^2} &= \sqrt{\{a-(a-2)\}^2 + \{a^2-(a-2)^2\}^2} \\ &= \sqrt{4 + \{4(a-1)\}^2} \\ &= \sqrt{16(a-1)^2 + 4} \end{aligned}$$

となるから、線分 AB の長さは $a=1$ のときに最小値 $\sqrt{4}=2$ をとる。ただし、そのときの b の値は $b=1-2=-1$ である。

(答) 2

3.

(1)

サイコロの目の出方は6通りであり同様に確からしいから、どの目が出る確率も等しく $\frac{1}{6}$ である。

[1] $k=1$ のとき

k 回目に1の目が出て終了するのは、1回目に1の目が出る場合であり、その確率は $\frac{1}{6}$ である。

[2] $k=2, 3, 4$ のとき

k 回目に1の目が出て終了するのは、 $k-1$ 回目までは毎回1以外の目が出て、 k 回目に1の目が出る場合のみである。よって確率は、

$$\left(1 - \frac{1}{6}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5^{k-1}}{6^k}$$

である。

ここで、[2]で得られた確率 $\frac{5^{k-1}}{6^k}$ に $k=1$ を代入すると、[1]で求めた確率と一致する。よって[1],

[2]をまとめて、求める確率は $\frac{5^{k-1}}{6^k}$ となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{5^{k-1}}{6^k}$$

(2)

得点が1点であるのは、1回目に1の目が出る場合のみであるから、

$$P(1) = \frac{1}{6}$$

である。得点が2点であることはないから、

$$P(2) = 0$$

である。得点が3点であるのは、1回目、2回目にそれぞれ2, 1の目が出る場合のみであるから、

$$P(3) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

である。得点が4点となるのは、1回目、2回目にそれぞれ3, 1の目が出る場合のみであるから、

$$P(4) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

である。得点が5点となるのは、1回目、2回目にそれぞれ4, 1の目が出る場合と、1回目、2回目、3回目にそれぞれ2, 2, 1の目が出る場合がある。この2つの事象は互いに排反であるから、

$$P(5) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{7}{216}$$

である。

$$(\text{答}) \quad P(1) = \frac{1}{6}, P(2) = 0, P(3) = \frac{1}{36}, P(4) = \frac{1}{36}, P(5) = \frac{7}{216}$$

(3)

1の目が出て終了する場合、得点が最大となるのは、1回目から4回目まで6の目が出続け、5回目に1の目が出るときである。このときの得点は

$$6 \times 4 + 1 = 25 \text{ (点)}$$

であるから、得点が27点になるためには、1の目は出てはならないことが分かる。また、6の目が出る回数が1回以下である場合、得点の最大値は

$$6 + 5 \times 4 = 26 \text{ (点)}$$

となるから、得点が27点になるために6の目が2回以上出る必要があることが分かる。これらの条件の下で考えると、得点が27点になるような目の出方の組合せは、

$$(6, 6, 6, 6, 3), (6, 6, 6, 5, 4), (6, 6, 5, 5, 5)$$

の3通りのみ存在する。各組合せに対して目の出方の順列も考えると、確率は

$$\begin{aligned} P(27) &= \frac{5!}{4!1!} \left(\frac{1}{6}\right)^4 \left(\frac{1}{6}\right) + \frac{5!}{3!1!1!} \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{1}{6}\right) \left(\frac{1}{6}\right) + \frac{5!}{2!3!} \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{1}{6}\right)^3 \\ &= \frac{5+20+10}{7776} \\ &= \frac{35}{7776} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{35}{7776}$$

