

1.

(1)

k 回目 ($k=1, 2, 3, 4$) に 1 の目が出て終了するのは、 $k-1$ 回目まで 1 以外が出て、 k 回目に 1 が出る場合であるから、その確率は、

$$\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{6}$$

である。

$$(\text{答}) \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{6}$$

(2)

得点が 1 点になるのは、1 回目に 1 が出る場合であるから、その確率は、

$$P(1) = \frac{1}{6}$$

である。

得点が 2 点になる場合は存在しないから、

$$P(2) = 0$$

である。

得点が 3 点になるのは、1 回目に 2 が出て、2 回目に 1 が出る場合であるから、その確率は、

$$P(3) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

である。

得点が 4 点になるのは、1 回目に 3 が出て、2 回目に 1 が出る場合であるから、その確率は、

$$P(4) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

である。

得点が 5 点になるのは、(4, 1) あるいは (2, 2, 1) の順で目が出る場合であるから、その確率は、

$$P(5) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{7}{216}$$

である。

$$(\text{答}) \begin{cases} P(1) = \frac{1}{6} \\ P(2) = 0 \\ P(3) = \frac{1}{36} \\ P(4) = \frac{1}{36} \\ P(5) = \frac{7}{216} \end{cases}$$

(3)

4 回以内で終了する場合の得点の最大値は、

$$6+6+6+1=19(\text{点})$$

であるから、得点が 27 点となるのは、サイコロを 5 回投げるときである。ここで、5 回とも 5 が出る場合、得点は、

$$5 \times 5 = 25(\text{点})$$

となり、27 点には 2 点足りないから、6 が必ず 2 回以上出ることがわかる。これらを踏まえると、サイコロの目の組み合わせは以下の [1]~[3] の 3 通りになるとわかるから、そのように場合分けして考える。

[1] 6 が 2 回、5 が 3 回出る場合

このようになる確率は、

$$\begin{aligned} {}_5C_2 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 &= \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} \cdot \frac{1}{6^5} \\ &= \frac{10}{6^5} \end{aligned}$$

である。

[2] 6 が 3 回、5 が 1 回、4 が 1 回出る場合

このようになる確率は、

$$5 \cdot 4 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{20}{6^5}$$

である。

[3] 6 が 4 回、3 が 1 回出る場合

このようになる確率は、

$$5 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^4 \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{6^5}$$

である。

[1]~[3] より、求めるべき確率は、

$$\frac{10+20+5}{6^5} = \frac{35}{7776}$$

である。

$$(\text{答}) \frac{35}{7776}$$

2.

(1)

$\overrightarrow{OF} = (2\sqrt{2}, 1, 1)$, $\overrightarrow{OG} = (0, 1, 1)$ であり, P は線分 FG の中点であるから,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= \frac{\overrightarrow{OF} + \overrightarrow{OG}}{2} \\ &= \left(\frac{2\sqrt{2} + 0}{2}, \frac{1+1}{2}, \frac{1+1}{2} \right) \\ &= (\sqrt{2}, 1, 1)\end{aligned}$$

である。したがって,

$$\overrightarrow{PO} = (-\sqrt{2}, -1, -1)$$

であり, また同時に,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PA} &= \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OA} \\ &= (-\sqrt{2}, -1, -1) + (2\sqrt{2}, 0, 0) \\ &= (\sqrt{2}, -1, -1)\end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PO} \cdot \overrightarrow{PA} &= -\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} + (-1) \cdot (-1) + (-1) \cdot (-1) \\ &= -2 + 1 + 1 \\ &= 0\end{aligned}$$

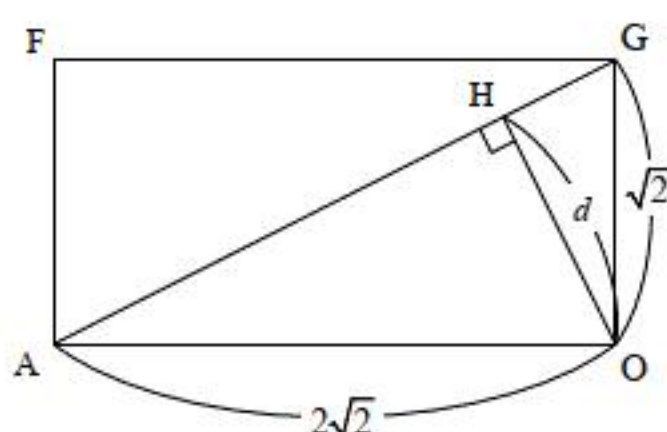
である。よって,

$$\angle OPA = 90^\circ$$

である。

(答) $\angle OPA = 90^\circ$

(2)



長方形 OAFG について考えると,

$$OG = \sqrt{(0-0)^2 + (1-0)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{2}$$

であり, $OA = 2\sqrt{2}$ であるから,

$$AG = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2})^2} = \sqrt{10}$$

であり,

$$\sin \angle OAG = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

である。したがって,

$$\begin{aligned}d &= OA \sin \angle OAH \\ &= 2\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{2\sqrt{10}}{5}\end{aligned}$$

である。

(答) $d = \frac{2\sqrt{10}}{5}$

(3)

$\overrightarrow{OP}$ と xy 平面のなす角が θ であり, $\overrightarrow{OD}$ は xy 平面に垂直であるから, $\overrightarrow{OP}$ と $\overrightarrow{OD}$ のなす角は $90^\circ - \theta$ である。また, 点 P の座標は, 実数 a を用いて $(a, 1, 1)$ と表せるから,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OD} &= |\overrightarrow{OP}| \cdot |\overrightarrow{OD}| \cdot \cos(90^\circ - \theta) \\ &= \sqrt{a^2 + 1^2 + 1^2} \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2} \sin \theta \quad \dots \textcircled{1} \\ &= \sqrt{a^2 + 2} \sin \theta\end{aligned}$$

である。さらに, $\overrightarrow{OP} = (a, 1, 1)$, $\overrightarrow{OD} = (0, 0, 1)$ であるから,

$$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OD} = a \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 1 \quad \dots \textcircled{2}$$

である。①と②より,

$$\sqrt{a^2 + 2} \sin \theta = 1$$

であり, これの両辺を 2 乗すると,

$$\begin{aligned}(a^2 + 2) \sin^2 \theta &= 1 \\ \Leftrightarrow (a^2 + 2) \frac{1 - \cos 2\theta}{2} &= 1 \\ \Leftrightarrow (a^2 + 2)(1 - \cos 2\theta) &= 2 \quad \dots \textcircled{3}\end{aligned}$$

とわかる。 $\theta = 15^\circ$ のとき, ③より,

$$\begin{aligned}(a^2 + 2)(1 - \cos 30^\circ) &= 2 \\ \Leftrightarrow (a^2 + 2) \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) &= 2 \\ \Leftrightarrow a^2 + 2 &= 2 \cdot \frac{2}{2 - \sqrt{3}} \\ \Leftrightarrow a^2 &= \frac{4}{2 - \sqrt{3}} - 2 \\ \Leftrightarrow a^2 &= \frac{2\sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} \\ \Leftrightarrow a^2 &= 4\sqrt{3} + 6 \\ \Leftrightarrow a &= \pm \sqrt{4\sqrt{3} + 6}\end{aligned}$$

であるから, 点 P の座標は, $(\pm \sqrt{4\sqrt{3} + 6}, 1, 1)$ である。

$\theta = 30^\circ$ のとき, ③より,

$$\begin{aligned}(a^2 + 2)(1 - \cos 60^\circ) &= 2 \\ \Leftrightarrow (a^2 + 2) \left(1 - \frac{1}{2} \right) &= 2 \\ \Leftrightarrow a^2 + 2 &= 2 \cdot 2 \\ \Leftrightarrow a^2 &= 2 \\ \Leftrightarrow a &= \pm \sqrt{2}\end{aligned}$$

であるから, 点 P の座標は, $(\pm \sqrt{2}, 1, 1)$ である。

(答) $\begin{cases} (\pm \sqrt{4\sqrt{3} + 6}, 1, 1) (\theta = 15^\circ) \\ (\pm \sqrt{2}, 1, 1) (\theta = 30^\circ) \end{cases}$

3.

(1)

$\vec{w} = k\vec{a} + \ell\vec{b}$ より,

$$(x, y) = k(2, 1) + \ell(1, 3)$$

$$\therefore \begin{cases} x = 2k + \ell & \cdots \textcircled{1} \\ y = k + 3\ell & \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

が成立する。①×3−②より,

$$3x - y = 5k$$

$$\therefore k = \frac{3x - y}{5}$$

であり、①−②×2 より,

$$x - 2y = -5\ell$$

$$\therefore \ell = \frac{-x + 2y}{5}$$

が成立する。

$$(\text{答}) \quad k = \frac{3x - y}{5}, \ell = \frac{-x + 2y}{5}$$

(2)

行列 P は変換 f を表すので,

$$\begin{pmatrix} 2k \\ k \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

が成立する。これに $k = \frac{3x - y}{5}$ を代入して,

$$\begin{pmatrix} \frac{6x - 2y}{5} \\ \frac{3x - y}{5} \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\therefore P = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

となる。同様に、行列 Q に対して

$$\begin{pmatrix} \ell \\ 3\ell \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

が成立するので、これに $\ell = \frac{-x + 2y}{5}$ を代入して

$$\begin{pmatrix} \frac{-x + 2y}{5} \\ \frac{-3x + 6y}{5} \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\therefore Q = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad P = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, Q = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$$

(3)

行列 PQ, QP, P^2, Q^2 をそれぞれ計算すると,

$$\begin{aligned} PQ &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= O \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} QP &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= O \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P^2 &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 30 & -10 \\ 15 & -5 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \\ &= P \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q^2 &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{25} \begin{pmatrix} -5 & 10 \\ -15 & 30 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} \\ &= Q \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad PQ = O, QP = O, P^2 = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} (=P), Q^2 = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} (=Q)$$

(4)

$R^n = s^n P + t^n Q$ と表されることを数学的帰納法で示す。

[1] $n=1$ のとき

$R = sP + tQ$ であるので、成立する。

[2] $n=k$ (k は自然数) で成立すると仮定したとき

すなわち、 $R^k = s^k P + t^k Q$ が成立すると仮定する。このとき、

$$\begin{aligned} R^{k+1} &= R \cdot R^k \\ &= (sP + tQ)(s^k P + t^k Q) \\ &= s^{k+1} P^2 + st^k PQ + s^k tQP + t^{k+1} Q^2 \end{aligned}$$

であり、(3)の結果より

$$\begin{aligned} R^{k+1} &= s^{k+1} P^2 + st^k PQ + s^k tQP + t^{k+1} Q^2 \\ &= s^{k+1} P + t^{k+1} Q \end{aligned}$$

となる。よって、 $n=k+1$ においても成立することがわかる。

以上[1], [2]より、数学的帰納法から、 $R^n = s^n P + t^n Q$ が成立することが示された。

$$(\text{答}) \quad R^n = s^n P + t^n Q$$

4.
(1)

$\log x$ の真数条件より、 $x > 0$ である。また、 $y = (\log x - 2 \log 2) \log x$ より、

$$\begin{aligned} y' &= \frac{\log x}{x} + \frac{\log x - 2 \log 2}{x} \\ &= \frac{2(\log x - \log 2)}{x} \\ y'' &= 2 \cdot \frac{\frac{1}{x} \cdot x - (\log x - \log 2) \cdot 1}{x^2} \\ &= \frac{2(-\log x + 1 + \log 2)}{x^2} \\ &= \frac{2(-\log x + \log 2e)}{x^2} \end{aligned}$$

であるから、 y の増減表は以下の通りになる。

x	(0)	$\cdots$	2	$\cdots$	$2e$	$\cdots$
y'		$-$	0	$+$	$+$	$+$
y''		$+$	$+$	$+$	0	$-$
y		$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$

ここで、 $f(x) = (\log x - 2 \log 2) \log x$ とおくと、

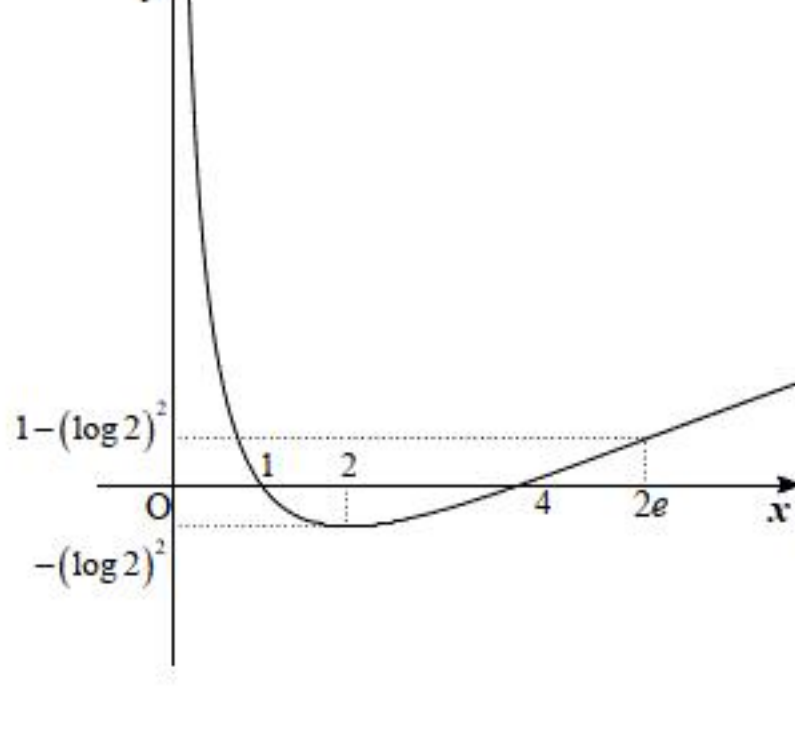
$$\begin{aligned} f(2) &= (\log 2 - 2 \log 2) \log 2 \\ &= -(\log 2)^2 \\ f(2e) &= (\log 2e - 2 \log 2) \log 2e \\ &= (\log 2 + 1 - 2 \log 2)(\log 2 + 1) \\ &= (-\log 2 + 1)(\log 2 + 1) \\ &= 1 - (\log 2)^2 \end{aligned}$$

である。また、曲線 C と x 軸の交点の x 座標について、

$$\begin{aligned} (\log x - 2 \log 2) \log x &= 0 \\ \Leftrightarrow (\log x - \log 4) \log x &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= 1, 4 \end{aligned}$$

であるから、 y 座標を含めた交点の座標は、 $(1, 0)$ 、 $(4, 0)$ である。

以上より、曲線 C のグラフは以下のようになる。



(答) 前図

(2)

変曲点 $(2e, 1 - (\log 2)^2)$ における接線の傾きは、

$$\begin{aligned} y' &= \frac{2(\log 2e - \log 2)}{2e} \\ &= \frac{2 \cdot 1}{2e} \\ &= \frac{1}{e} \end{aligned}$$

であるから、変曲点における接線の方程式は、

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{e}(x - 2e) + 1 - (\log 2)^2 \\ \Leftrightarrow y &= \frac{1}{e}x - 1 - (\log 2)^2 \end{aligned}$$

である。また、変曲点における法線の傾き m について、

$$\begin{aligned} m \cdot \frac{1}{e} &= -1 \\ \Leftrightarrow m &= -e \end{aligned}$$

であるから、変曲点における法線の方程式は、

$$\begin{aligned} y &= -e(x - 2e) + 1 - (\log 2)^2 \\ \Leftrightarrow y &= -ex + 2e^2 + 1 - (\log 2)^2 \end{aligned}$$

である。接線 $y = \frac{1}{e}x - 1 - (\log 2)^2$ と x 軸との交点 P の x 座標について、

$$\begin{aligned} \frac{1}{e}x - 1 - (\log 2)^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= e\{1 + (\log 2)^2\} \end{aligned}$$

であるから、点 P の座標は、 $(e\{1 + (\log 2)^2\}, 0)$ である。

法線 $y = -ex + 2e^2 + 1 - (\log 2)^2$ と x 軸との交点 Q の x 座標について、

$$\begin{aligned} -ex + 2e^2 + 1 - (\log 2)^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= 2e + \frac{1 - (\log 2)^2}{e} \end{aligned}$$

であるから、点 Q の座標は、 $(2e + \frac{1 - (\log 2)^2}{e}, 0)$ である。

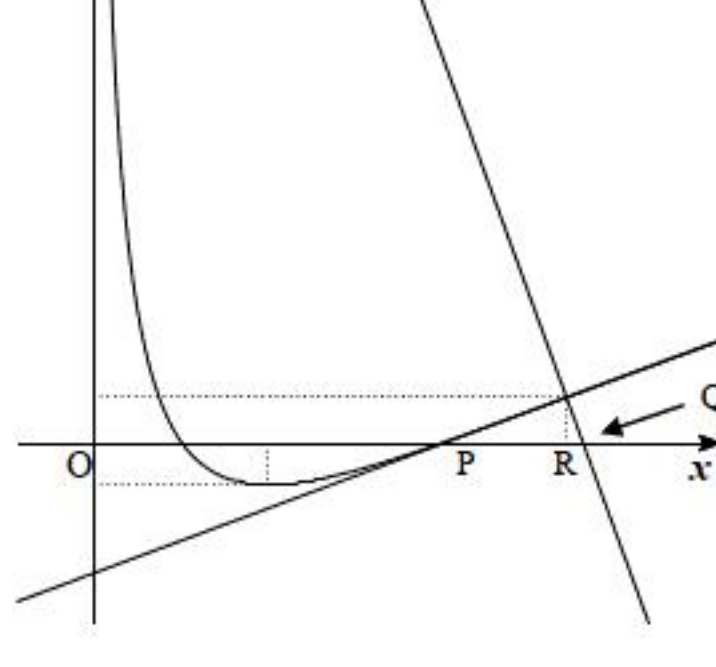
(答) 接線の方程式: $y = \frac{1}{e}x - 1 - (\log 2)^2$

法線の方程式: $y = -ex + 2e^2 + 1 - (\log 2)^2$

交点 P の座標: $(e\{1 + (\log 2)^2\}, 0)$

交点 Q の座標: $(2e + \frac{1 - (\log 2)^2}{e}, 0)$

(3)



$P(e\{1 + (\log 2)^2\}, 0)$ であるから、線分 OP の長さは、

$$OP = e\{1 + (\log 2)^2\}$$

である。また、 $Q(2e + \frac{1 - (\log 2)^2}{e}, 0)$ 、 $R(2e, 0)$ であり、 Q の方が R よりも x 軸に関して正の

位置にあるから、

$$\begin{aligned} QR &= 2e + \frac{1 - (\log 2)^2}{e} - 2e \\ &= \frac{1 - (\log 2)^2}{e} \end{aligned}$$

である。したがって、線分 OP の長さと線分 QR の長さの積は、

$$\begin{aligned} OP \cdot QR &= e\{1 + (\log 2)^2\} \cdot \frac{1 - (\log 2)^2}{e} \\ &= 1 - (\log 2)^4 \end{aligned}$$

である。

(答) $1 - (\log 2)^4$

(4)

$\alpha = \log 2$ とおくと、曲線 C と x 軸で囲まれる図形の面積 S は、

$$\begin{aligned} S &= \int_1^4 \{-(\log x - 2\alpha) \log x\} dx \\ &= \int_1^4 \{-(\log x)^2 + 2\alpha \log x\} dx \end{aligned}$$

である。ここで、

$$\begin{aligned} \int (\log x)^2 dx &= x(\log x)^2 - \int x \cdot 2 \log x \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= x(\log x)^2 - 2 \int \log x dx \\ &= x(\log x)^2 - 2 \left(x \log x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx \right) \\ &= x(\log x)^2 - 2 \left(x \log x - \int dx \right) \\ &= x(\log x)^2 - 2x \log x + 2x + C_1 \end{aligned}$$

であり(C_1 は積分定数)、

$$\begin{aligned} \int \log x dx &= x \log x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= x \log x - \int dx \\ &= x \log x - x + C_2 \end{aligned}$$

であるから(C_2 は積分定数)、

$$\begin{aligned} S &= \left[-\{x(\log x)^2 - 2x \log x + 2x\} + 2\alpha(x \log x - x) \right]_1^4 \\ &= \left[-x(\log x)^2 + (2\alpha + 2)x \log x - (2\alpha + 2)x \right]_1^4 \\ &= \{-4(\log 4)^2 + (2\alpha + 2) \cdot 4 \log 4 - (2\alpha + 2) \cdot 4\} - \{-(2\alpha + 2)\} \\ &= \{-16(\log 2)^2 + 16(\alpha + 1) \log 2 - 8\alpha - 8\} + 2\alpha + 2 \\ &= \{-16\alpha^2 + 16\alpha(\alpha + 1) - 8\alpha - 8\} + 2\alpha + 2 \\ &= 10\alpha - 6 \\ &= 10 \log 2 - 6 \end{aligned}$$

である。

(答) $10 \log 2 - 6$