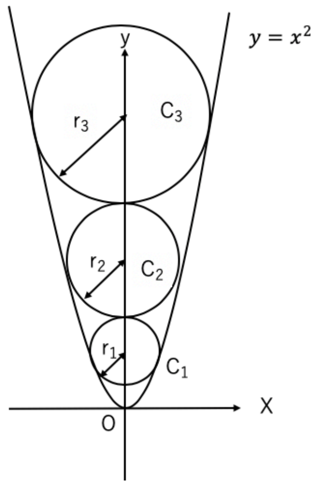
1. 中心がy軸状にある半径 r_1 の円 C_1 が放物線$y = x^2$に 2 点で接している。
$C_n(n = 2,3,\ldots)$はy軸上に中心を持ち、放物線$y = x^2$に接する半径 $r_n(n = 2,3,\ldots)$の円で、C_{n-1} と図のように外接している。r_1=1 とするとき、r_n を n の関数で表せ。



2. 図のような縦横同数の格子の全ての格子点上に、白または黒の石を置く。縦または横に隣り合う石の色が同じならその間に実線を、異なっていれば点線を引き、実線の数を数える操作を行う。図 1 の実線の数は 2 本、図 2 では 5 本である。
(1)2×2の格子点に 4 つの石を置くとき、石の置き方にかかわらず、実線の数は偶数になることを示せ。
(2)3×3の格子点に 9 つの石を置くとき、実線の数が奇数になるための必要十分条件を示せ。ただし、(1)の結果を使ってもよい。

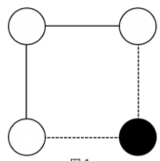


図 1

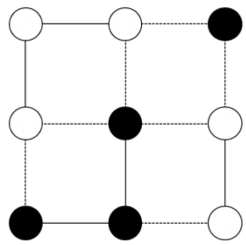


図 2

3. 曲線 C_1：$y^2 = 4px$と C_2：$x^2 - y^2 = -q$（ただし、$p > 0, q > 0$）の二つの曲線が接するとき、次の問いに答えよ。
(1)qをpを用いて表せ。また接点の座標をpを用いて表せ。
(2)$\sqrt{x^2+q} + x = t$と置いたときxをtで表せ。また不定積分$I = \int \sqrt{x^2+q}\,dx$をxからtへの置換積分により、tの関数として求めよ。
(3)曲線 C_1,C_2 とy軸で囲まれた部分の面積をpで表せ。

4. 一辺の長さがaの正八面体の体積と、この正八面体に内接する球、外接する球の半径を求めよ。