

◀芸術工学部▶

(120 分)

1. サイコロを 1 の目が出るまで投げる。ただし、5 回投げて 1 の目が出なければそこで止める。それまでに出了たサイコロの目の和を得点とする。例えば、2, 3, 1 の順で目が出れば $2 + 3 + 1 = 6$ 点、2, 4, 3, 2, 6 ならば $2 + 4 + 3 + 2 + 6 = 17$ 点となる。このとき次の問いに答えよ。
 - (1) 4 以下の自然数 k に対して、 k 回目に 1 の目が出て終了する確率を求めよ。
 - (2) 得点が 1, 2, 3, 4, 5 点である確率 $P(1), P(2), P(3), P(4), P(5)$ をそれぞれ求めよ。
 - (3) 得点が 27 点である確率 $P(27)$ を求めよ。
2. 座標空間における点 $O(0, 0, 0)$, $A(2\sqrt{2}, 0, 0)$, $B(2\sqrt{2}, 1, 0)$, $C(0, 1, 0)$, $D(0, 0, 1)$, $E(2\sqrt{2}, 0, 1)$, $F(2\sqrt{2}, 1, 1)$, $G(0, 1, 1)$ を頂点とする直方体 $OABC-DEFG$ について、直線 FG 上の点を P とするとき、次の問いに答えよ。
 - (1) 点 P が線分 FG の中点であるとき、 $\angle OPA$ を求めよ。
 - (2) 点 G と点 A を通る直線 l と原点 O との距離 d を求めよ。
 - (3) 点 O と点 P を通る直線 m と xy 平面のなす角を θ とするとき、 $\theta = 15^\circ$, $\theta = 30^\circ$ を満たす点 P の座標をそれぞれ求めよ。
3. 2 つのベクトルを $\vec{a} = (2, 1)$, $\vec{b} = (1, 3)$ とおく。平面上の任意のベクトル $\vec{w} = (x, y)$ を $\vec{w} = k\vec{a} + l\vec{b}$ と表すとき、次の問いに答えよ。
 - (1) k, l を x, y で表せ。
 - (2) (1) の k, l に対して、点 $W(\vec{w})$ を点 $U(k\vec{a})$ へ移す変換を f , 点 $W(\vec{w})$ を点 $V(l\vec{b})$ へ移す変換を g とするとき、2 つの変換 f, g を表す行列 P, Q を求めよ。
 - (3) 行列 PQ, QP, P^2, Q^2 を求めよ。
 - (4) 行列 R が $R = sP + tQ$ と表されるとき、自然数 n に対して R^n を類推し、それが正しいことを数学的帰納法で証明せよ。ただし、 s, t は実数とする。
4. 曲線 $C : y = (\log x - 2 \log 2) \log x$ について次の問いに答えよ。
 - (1) 関数の増減と凹凸を調べ、曲線 C の概形をかけ。曲線 C が x 軸および y 軸と共有点がある場合にはその点の座標を明記すること。また、極値を表す点や変曲点がある場合にはその座標を明記すること。
 - (2) 変曲点における接線と法線の方程式を求めよ。また、接線と x 軸との交点 P および法線と x 軸との交点 Q の座標を求めよ。
 - (3) 原点を O とし、変曲点から x 軸に下ろした垂線が x 軸と交わる点を R とする。線分 OP の長さと線分 QR の長さの積を求めよ。
 - (4) 曲線 C と x 軸で囲まれる図形の面積を求めよ。