

1.

(1)

2つの解を α, β ($\alpha \leq \beta$) とすると解と係数の関係より

$$\alpha + \beta = -m, \alpha\beta = 3$$

であり m は整数であるから $(\alpha, \beta) = (1, 3), (-3, -1)$ である。よって $(m_1, m_2) = (\pm 4, \mp 4)$ (複号同順)である。

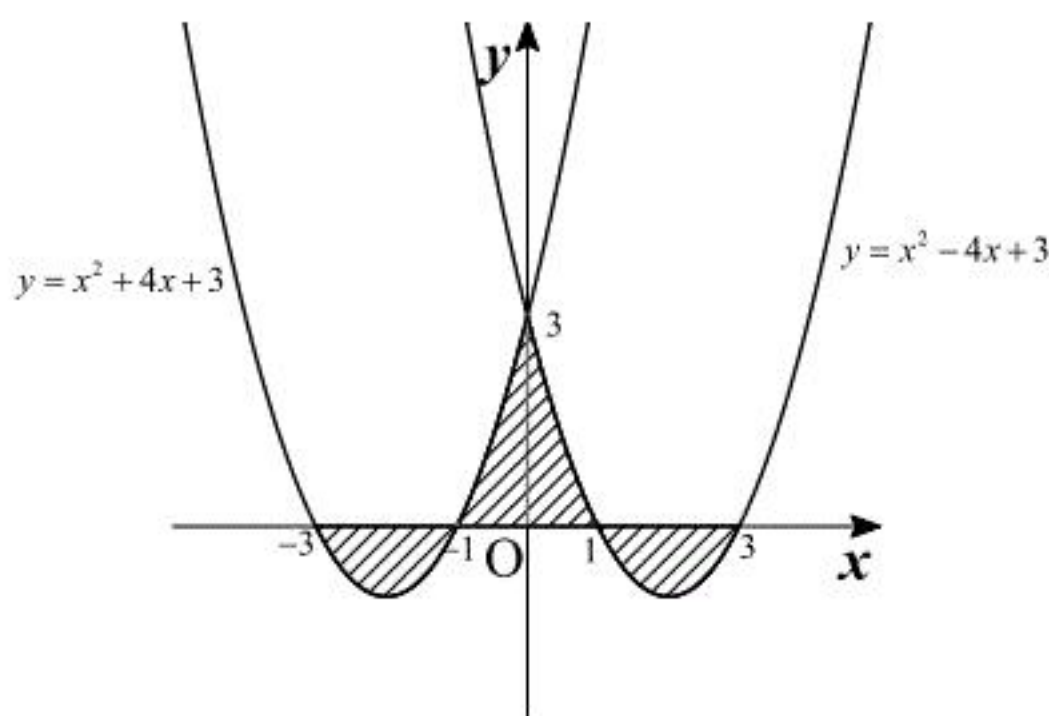
(答) $(m_1, m_2) = (\pm 4, \mp 4)$ (複号同順)

(2)

$x^2 + 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow (x+3)(x+1) = 0$ であるから、放物線 $y = x^2 + 4x + 3$ と x 軸の交点の x 座標は

$x = -3, -1$ である。また、同様に $x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow (x-3)(x-1) = 0$ であるから、放物線

$y = x^2 - 4x + 3$ と x 軸の交点の x 座標は $x = 3, 1$ である。よって、求める面積 S は下の斜線部のようになる。



よって、 y 軸に対する対称性を考慮すると

$$\begin{aligned} S &= 2 \left\{ \int_0^1 (x^2 - 4x + 3) dx + \int_1^3 (-x^2 + 4x - 3) dx \right\} \\ &= 2 \left\{ \left[\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x \right]_0^1 - \int_1^3 (x-3)(x-1) dx \right\} \\ &= 2 \left\{ \frac{4}{3} - \left(-\frac{1}{6} \right) (3-1)^3 \right\} \\ &= \frac{16}{3} \end{aligned}$$

である。

(答) $\frac{16}{3}$

2.

(1)

6枚のカードから2枚のカードを選ぶ組み合わせは ${}_6C_2=15$ 通りであり、これらは同様に確からしい。また、石がマス目に置かれるのは、文字のカードから1枚、数字のカードから1枚を取り出したときであり、この組み合わせは ${}_3C_1 \cdot {}_3C_1=9$ 通りである。よって求める確率は

$\frac{9}{15}=\frac{3}{5}$ である。

(答) $\frac{3}{5}$

(2)

1回目の試行後石が1つマス目に置かれているとき、1回目と異なる組み合わせのカードを引けば2回目の試行後石がマス目に置かれている。また1回目の試行後石がマス目に置かれて

いないときは(1)と同様であるから、この状態のとき石が置かれる確率は $\frac{3}{5}$ である。よって求

める確率は

$$\frac{3}{5} \cdot \left(1 - \frac{1}{15}\right) + \left(1 - \frac{3}{5}\right) \cdot \frac{3}{5} = \frac{4}{5}$$

である。

(答) $\frac{4}{5}$

(3)

以下、3回目の試行後に置かれている石の数で場合分けして考える。

[1] 3回目の試行後石が1つマス目に置かれているとき

これは

①文字、数字同士のカードを2回引いて文字と数字の組み合わせを1回引いたとき

②文字と数字の組み合わせを1回とその組み合わせ以外で同一の文字と数字のカードの組み合わせを2回引いたとき

③同じ文字と数字のカードの組み合わせを3回引いたとき

であり、①、②、③の起こる確率はこの順にそれぞれ、

$$\frac{{}_3C_1 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 9}{15^3} = \frac{36}{125}$$

$$\frac{{}_3C_1 \cdot 9 \cdot 8}{15^3} = \frac{8}{125}$$

$$\frac{9}{15^3} = \frac{1}{375}$$

である。よって、3回目の試行後石が1つマス目に置かれている確率は

$$\frac{36}{125} + \frac{8}{125} + \frac{1}{375} = \frac{133}{375}$$

である。

[2] 3回目の試行後石が2つマス目に置かれているとき

これは2回異なる文字と数字の組み合わせを引いて、1回文字、数字同士のカードを引いたときであるから、この確率は

$${}_3C_2 \cdot \frac{9}{15} \cdot \frac{8}{15} \cdot \frac{6}{15} = \frac{144}{375}$$

である。

[3] 3回目の試行後石が3つマス目に置かれているとき

これは3回異なる文字と数字の組み合わせを引いたときであるから、この確率は

$$\frac{9}{15} \cdot \frac{8}{15} \cdot \frac{7}{15} = \frac{56}{375}$$

である。

以上[1], [2], [3]より、マス目に置かれている石の数の期待値は

$$1 \cdot \frac{133}{375} + 2 \cdot \frac{144}{375} + 3 \cdot \frac{56}{375} = \frac{589}{375}$$

である。

(答) $\frac{589}{375}$

3.

(1)

$y = \frac{x^2}{2}$ を微分すると $y' = x$, $y = x^2$ を微分すると $y' = 2x$ になる。よって l の傾きは a , m の傾きは $2b$ となる。また θ が直角のとき l と m は直交するから、それぞれの直線の傾きの積は -1 になる。よって

$$\begin{aligned} & \begin{cases} 2b - a = 4 \\ 2ab = -1 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} 2b = a + 4 \\ a(a + 4) = -1 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} 2b = a + 4 \\ a^2 + 4a + 1 = 0 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow a = -2 \pm \sqrt{3}, b = \frac{1}{2}(2 \pm \sqrt{3}) \end{aligned}$$

である。このとき $a \leq 0$, $b \geq 0$ もみたす。

$$(\text{答}) \quad a = -2 \pm \sqrt{3}$$

(2)

(1) より $a \neq -2 \pm \sqrt{3}$ である。 l と m の x 軸正方向からの角度をそれぞれ α, β とすると、

$\theta = \alpha - \beta$ と表せる。また $\tan \alpha, \tan \beta$ はそれぞれ直線 l, m の傾きに等しくなるから

$$\tan \alpha = a, \tan \beta = 2b$$

である。よって

$$\begin{aligned} \tan \theta &= \tan(\alpha - \beta) \\ &= \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \cdot \tan \beta} \\ &= \frac{a - 2b}{1 + 2ab} \\ &= \frac{a - (a + 4)}{1 + a(a + 4)} \\ &= -\frac{4}{a^2 + 4a + 1} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \tan \theta = -\frac{4}{a^2 + 4a + 1}$$

(3)

θ が最大になるのは θ が鈍角のときであり、 $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ で $\tan \theta$ は増加関数であるから、

$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ において $\tan \theta$ が最大のときを考えればよく、このとき $a^2 + 4a + 1$ が正の最大値をと

る。また、 θ が最小になるのは θ が鋭角のときであり、 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ で $\tan \theta$ は増加関数であるか

ら、 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ において $\tan \theta$ が最小のときを考えればよく、このとき $a^2 + 4a + 1$ が負の最小値

をとる。ここで、 $a \leq 0$, $2b = a + 4 \geq 0$ であるから、 a のとりうる値の範囲は $-4 \leq a \leq 0$ である。また、

$$a^2 + 4a + 1 = (a + 2)^2 - 3$$

であるから、この範囲において $a^2 + 4a + 1$ は最大値 1 ($a = -4, 0$)、最小値 -3 ($a = -2$) をとる。よ

って θ が最大になるのは $a = -4, 0$ のときであり、 θ が最小になるのは $a = -2$ のときである。

$$(\text{答}) \quad \theta \text{ が最大: } a = -4, 0, \theta \text{ が最小: } a = -2$$

4.

(1)

$a+b=1 \Leftrightarrow b=1-a$ であるから, $a, b > 0$ より $0 < a < 1$ である。また

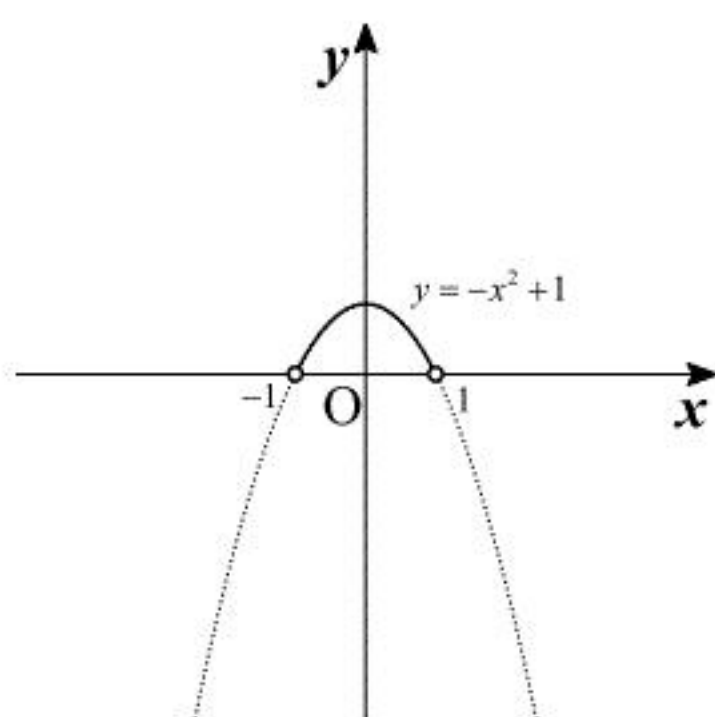
$$\begin{aligned} a^2 - b^2 &= a^2 - (1-a)^2 \\ &= 2a - 1 \end{aligned}$$

$$4ab = 4a(1-a)$$

である。よって $X = 2a - 1, Y = 4a(1-a)$ とおくと, $a = \frac{X+1}{2}$ より

$$Y = 2(X+1) - (X+1)^2 = -X^2 + 1$$

であり, $0 < a < 1$ より $-1 < X < 1$ である。よって C の描く図形は下の実線部のようになる。



(答) 前図

(2)

$$\begin{aligned} \overrightarrow{CA} &= (a - (a^2 - b^2), b - 4ab) \\ &= (1-a, (1-4a)(1-a)) \\ &= (1-a)(1, 1-4a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{CB} &= (-b - (a^2 - b^2), a - 4ab) \\ &= (-a, a(4a-3)) \\ &= a(-1, 4a-3) \end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned} \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} &= a(1-a)\{1 \cdot (-1) + (1-4a)(4a-3)\} \\ &= -4a(1-a)(2a-1)^2 \end{aligned}$$

である。ここで, $a > 0, 1-a > 0$ であるから, $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} \leq 0$ である。 $\cos \theta$ は

$$\cos \theta = \frac{\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}}{|\overrightarrow{CB}| |\overrightarrow{CA}|}$$

であるから, $\cos \theta \leq 0$ となる。よって, θ が最小となるのは $\cos \theta = 0$ のときであり, このとき

$a = \frac{1}{2}$ である。

(答) $a = \frac{1}{2}$

(3)

$\triangle ABC$ の面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} a(1-a) |1 \cdot (4a-3) - (1-4a)(-1)| \quad (\because a > 0, 1-a > 0) \\ &= \frac{1}{2} a(1-a) \cdot 2 \\ &= -\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

であるから, $0 < a < 1$ より S は $a = \frac{1}{2}$ のときに最大値をとる。

(答) $a = \frac{1}{2}$