

1.

(1)

関数 $f(x) = x \log x - \tan x$ を x で微分すると

$$f'(x) = \log x + 1 - \frac{1}{\cos^2 x}$$

である。よって、曲線 $y = f(x)$ 上の点 $P\left(\frac{\pi}{4}, f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$ における接線の方程式は

$$\begin{aligned} y &= \left(\log \frac{\pi}{4} + 1 - \frac{1}{\cos^2 \frac{\pi}{4}} \right) \left(x - \frac{\pi}{4} \right) + \frac{\pi}{4} \log \frac{\pi}{4} - \tan \frac{\pi}{4} \\ &\Leftrightarrow y = \left(\log \frac{\pi}{4} - 1 \right) x + \frac{\pi}{4} - 1 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad y = \left(\log \frac{\pi}{4} - 1 \right) x + \frac{\pi}{4} - 1$$

(2)

$a \neq 0$ より与えられた定積分を整理すると

$$\begin{aligned} A &= \int_0^\pi e^{-ax} \cos 2x \, dx \\ &= \left[-\frac{1}{a} e^{-ax} \cos 2x \right]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{2}{a} e^{-ax} \sin 2x \, dx \\ &= -\frac{1}{a} (e^{-a\pi} - 1) - \left[-\frac{2}{a^2} e^{-ax} \sin 2x \right]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{4}{a^2} e^{-ax} \cos 2x \, dx \\ &= -\frac{1}{a} (e^{-a\pi} - 1) - \frac{4}{a^2} A \end{aligned}$$

となるから、

$$\begin{aligned} A &= -\frac{1}{a} (e^{-a\pi} - 1) - \frac{4}{a^2} A \\ &\Leftrightarrow \frac{a^2 + 4}{a^2} A = \frac{1}{a} (1 - e^{-a\pi}) \\ \therefore A &= \frac{a}{a^2 + 4} (1 - e^{-a\pi}) \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad A = \frac{a}{a^2 + 4} (1 - e^{-a\pi})$$

(3)

$$\begin{aligned} B &= \int_0^\pi e^{-ax} \sin^2 x \, dx \\ &= \int_0^\pi e^{-ax} \cdot \frac{1 - \cos 2x}{2} \, dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\pi e^{-ax} \, dx - \frac{1}{2} A \\ &= \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{a} e^{-ax} \right]_0^\pi - \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{a^2 + 4} (1 - e^{-a\pi}) \\ &= -\frac{1}{2a} (e^{-a\pi} - 1) - \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{a^2 + 4} (1 - e^{-a\pi}) \\ &= \frac{2}{a(a^2 + 4)} (1 - e^{-a\pi}) \end{aligned}$$

であり、

$$\begin{aligned} C &= \int_0^\pi e^{-ax} \cos^2 x \, dx \\ &= \int_0^\pi e^{-ax} \cdot \frac{1 + \cos 2x}{2} \, dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\pi e^{-ax} \, dx + \frac{1}{2} A \\ &= -\frac{1}{2a} (e^{-a\pi} - 1) + \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{a^2 + 4} (1 - e^{-a\pi}) \\ &= \frac{a^2 + 2}{a(a^2 + 4)} (1 - e^{-a\pi}) \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad B = \frac{2}{a(a^2 + 4)} (1 - e^{-a\pi}), \quad C = \frac{a^2 + 2}{a(a^2 + 4)} (1 - e^{-a\pi})$$

2.

(1)

7, 8, 9 のカードを順に A, B, C の位置に置くとき、どの行にも同じ数字が現れないのは、1, 2, 3 のカードを D, E, F の位置に置き、4, 5, 6 のカードを G, H, I の位置に置く場合であるから、求めるカードの置き方は

$$3! \cdot 3! = 36 \text{ (通り)}$$

である。

(答) 36 通り

(2)

カードの置き方を 1, 2, 3 のカードを置く場所、4, 5, 6 のカードを置く場所、7, 8, 9 のカードを置く場所の 3 つに分けて考え、それらを順に P, Q, R とする。どの行にも同じ数字が現れないのは

[1] P が D, E, F であり Q が G, H, I であり R が A, B, C である場合

[2] P が G, H, I であり Q が A, B, C であり R が D, E, F である場合

[3] P が D, E, F のうち 1 つと G, H, I のうち 2 つであり Q が G, H, I の残り 1 つと A, B, C のうち 2 つであり R が残りである場合

[4] P が D, E, F のうち 2 つと G, H, I のうち 1 つであり Q が G, H, I の残り 2 つと A, B, C のうち 1 つであり R が残りである場合

のいずれかである。[1], [2]におけるカードの置き方は、P, Q, R におけるそれぞれのカードの置き方を考えて、それぞれ

$$(3!)^3 = 216 \text{ (通り)}$$

である。また、[3]において、D, E, F から P を選ぶ選び方、G, H, I から Q を選ぶ選び方、A, B, C から R を選ぶ選び方はそれぞれ 3 通りであり、さらに P, Q, R におけるそれぞれのカードの置き方を考えて、カードの置き方は

$$3^3 \cdot (3!)^3 = 5832 \text{ (通り)}$$

となる。同様に考えて、[4]についてもカードの置き方は 5832 通りとなる。よって、求めるカードの置き方は

$$216 + 216 + 5832 + 5832 = 12096 \text{ (通り)}$$

である。

(答) 12096 通り

(3)

図 2 において、B は 1, 2, 3 と同じ行にあり、4, 5, 6 と同じ列であるので、7, 8, 9 しか入り得ない、すなわち R に当たる。また、D も 4, 5, 6 と同じ行にあり、1, 2, 3 と同じ列であるので、R となる。同様に考えて、F, H が P であり、C, G が Q であると分かる。

また、A は 1, 2, 3 と同じ行、列にあるので Q または R のいずれかであり、同様に考えて E が P または R、I が P または Q であると分かる。

以上より、どの行、どの列にも同じ数字が現れないのは

P が F, H, I であり Q が A, C, G であり R が B, D, E である場合

P が E, F, H であり Q が C, G, I であり R が A, B, D である場合

のいずれかである。よって、求めるカードの置き方は

$$(3!)^3 + (3!)^3 = 432 \text{ (通り)}$$

である。

(答) 432 通り

3.

(1)

背理法を用いて示す。つまり、 A が逆行列を持つと仮定して矛盾を導く。 A が逆行列 A^{-1} を持つという仮定のもとで、 $A^2B = ABA$ の両辺に左から A^{-1} をかけると

$$\begin{aligned} A^{-1}A^2B &= A^{-1}ABA \\ \Leftrightarrow AB &= BA \end{aligned}$$

となる。これは $AB \neq BA$ に矛盾する。よって、 A は逆行列を持たない。

(証明終)

(2)

A は逆行列を持たないので、 $\det A = 0$ である。よって、ケーリーハミルトンの定理より、実数 t を用いて

$$\begin{aligned} A^2 - tA &= O \\ \Leftrightarrow A^2 &= tA \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

が成り立つ。これを $A^2B = BA^2$ に代入すると

$$\begin{aligned} (tA)B &= B(tA) \\ \Leftrightarrow tAB &= tBA \\ \Leftrightarrow t(AB - BA) &= O \end{aligned}$$

となる。 $AB \neq BA$ であるから、 $t = 0$ である。よって、 $\textcircled{1}$ より $A^2 = O$ である。

$$(\text{答}) \quad A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(3)

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ とおく。 A について、ケーリーハミルトンの定理より

$$A^2 - (a+d)A = O$$

であり、 $\textcircled{1}$ と比較することで

$$a+d = t = 0 \quad \dots \textcircled{2}$$

を得る。また、 B についてもケーリーハミルトンの定理より

$$B^2 - (p+s)B + (ps - qr)E = O$$

が成り立つ。題意より $B^2 = E$ であるから代入して

$$\begin{aligned} E - (p+s)B + (ps - qr)E &= O \\ \Leftrightarrow (p+s)B &= (ps - qr + 1)E \end{aligned}$$

となる。 $p+s \neq 0$ とすると、実数 k を用いて $B = kE$ と表すことができ、これは $AB \neq BA$ に矛盾する。よって、 $p+s = 0 \Leftrightarrow s = -p$ である。これと $\textcircled{2}$ より、

$$\begin{aligned} AB + BA &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & q \\ r & -p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p & q \\ r & -p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ap + br & aq - bp \\ cp - ar & cq + ap \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ap + cq & bp - aq \\ ar - cp & br + ap \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2ap + br + cq & 0 \\ 0 & 2ap + br + cq \end{pmatrix} \\ &= lE \end{aligned}$$

となる。ただし、 $l = 2ap + br + cq$ とおいた。また、 $A^2 = O, B^2 = E, ABA = A^2B = O$ より

$$\begin{aligned} (AB + BA)^2 &= ABAB + AB^2A + BA^2B + BABA \\ &= O + O + O + O \\ &= O \end{aligned}$$

である。よって、 $(lE)^2 = O$ となるから $l = 0$ である。したがって

$$AB + BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

である。

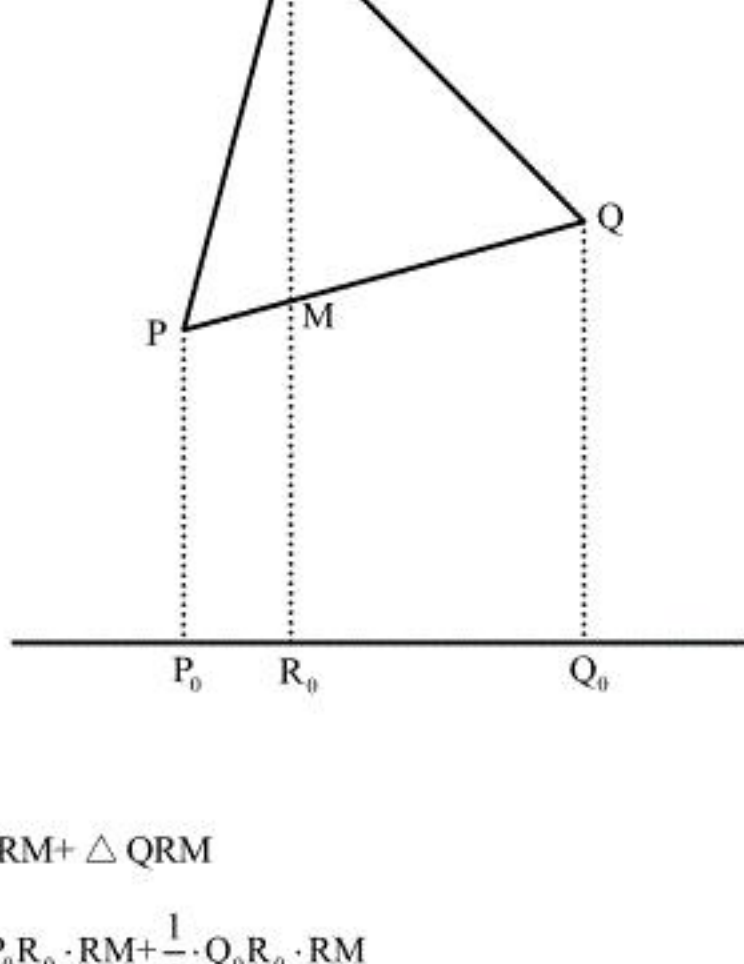
$$(\text{答}) \quad AB + BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4.

(1)

[1] 面PQRと平面P'Q'R'が平行でない場合

平面PQRと平面P'Q'R'との交線を l とし、点P, Q, Rから l に下ろした垂線の足をそれぞれ P_0, Q_0, R_0 とおく。このとき、直線 l 上に P_0, R_0, Q_0 の順に並んでいるとしても一般性を失わない。線分PQと RR_0 の交点をM、線分P'Q'と $R'R_0$ の交点をM'とおく。



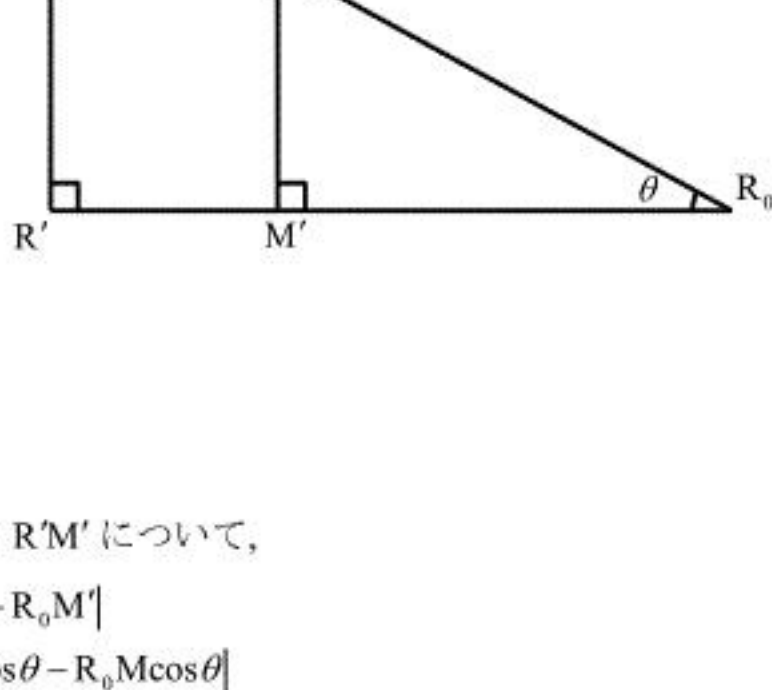
このとき、

$$\begin{aligned}\triangle PQR &= \triangle PRM + \triangle QRM \\ &= \frac{1}{2} \cdot P_0R_0 \cdot RM + \frac{1}{2} \cdot Q_0R_0 \cdot RM \\ &= \frac{1}{2} \cdot (P_0R_0 + Q_0R_0) \cdot RM \\ &= \frac{1}{2} \cdot P_0Q_0 \cdot RM\end{aligned}$$

であり、同様に

$$\begin{aligned}\triangle P'Q'R' &= \triangle P'R'M' + \triangle Q'R'M' \\ &= \frac{1}{2} \cdot P_0R_0 \cdot R'M' + \frac{1}{2} \cdot Q_0R_0 \cdot R'M' \\ &= \frac{1}{2} \cdot (P_0R_0 + Q_0R_0) \cdot R'M' \\ &= \frac{1}{2} \cdot P_0Q_0 \cdot R'M'\end{aligned}$$

となる。また、3点 R, R', R_0 を通るような平面は下図のようになる。



上図より、RMとR'M'について、

$$\begin{aligned}R'M' &= |R_0R' - R_0M'| \\ &= |R_0R \cos \theta - R_0M \cos \theta| \\ &= |R'M' \cos \theta| \\ &= R'M' |\cos \theta|\end{aligned}$$

が成立するので、以上より

$$\begin{aligned}\triangle P'Q'R' &= \frac{1}{2} \cdot R'M' \cdot P_0Q_0 \\ &= \frac{1}{2} \cdot RM \cdot P_0Q_0 \cdot |\cos \theta| \\ &= \triangle PQR \cdot |\cos \theta|\end{aligned}$$

が成立する。

[2] 面PQRと平面P'Q'R'が平行である場合

このとき $\triangle P'Q'R' = \triangle PQR$ であり、 $\cos \theta = 1$ であるので

$$\triangle P'Q'R' = \triangle PQR \cdot |\cos \theta|$$

となる。

以上[1], [2]より、

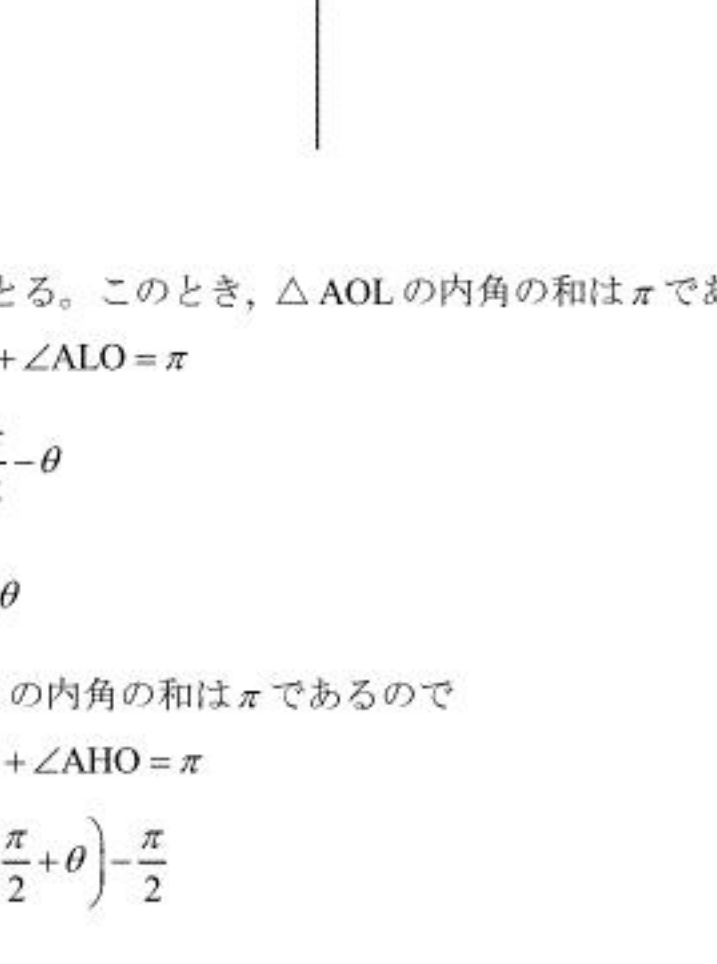
$$S_1 = S |\cos \theta|$$

となる。

(証明終)

(2)

Oから $\triangle PQR$ に下ろした垂線の足をHとする。このとき、Oを通り l と垂直な面における平面は以下ようになる。



上図のように点をLをとる。このとき、 $\triangle AOL$ の内角の和は π であるから

$$\angle LAO + \angle AOL + \angle ALO = \pi$$

$$\begin{aligned}\therefore \angle LAO &= \pi - \frac{\pi}{2} - \theta \\ &= \frac{\pi}{2} - \theta\end{aligned}$$

となる。同様に $\triangle AOH$ の内角の和は π であるので

$$\angle HAO + \angle AOH + \angle AHO = \pi$$

$$\begin{aligned}\therefore \angle AOH &= \pi - \left(\frac{\pi}{2} + \theta \right) - \frac{\pi}{2} \\ &= \theta\end{aligned}$$

となる。よって

$$OH = OA |\cos \theta|$$

が成立するから、

$$\begin{aligned}V &= \frac{1}{3} S \cdot OH \\ &= \frac{1}{3} S \cdot OA |\cos \theta| \\ &= \frac{1}{3} S |\cos \theta| \cdot OA \\ &= \frac{1}{3} OA \cdot S_1\end{aligned}$$

となる。また、OHは1辺の長さが1の正四面体の点Oから $\triangle PQR$ に下ろした垂線の足であるから

$$OH = \sqrt{1^2 - \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

であり、

$$V = \frac{1}{3} S \cdot OH = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{\sqrt{2}}{12}$$

と求まる。したがって、

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{2}}{12} &= \frac{1}{3} OA \cdot S_1 \\ \Leftrightarrow S_1 &= \frac{\sqrt{2}}{4OA}\end{aligned}$$

となる。ここで、OAはAがP, Q, Rのいずれかに一致するときに最大値1をとるから、 S_1 の最小値は $\frac{\sqrt{2}}{4}$ である。

(証明終)

(答) $\frac{\sqrt{2}}{4}$

(3)

四面体OPQRを平面QQ'R'Rで分割し、四面体CPQRと四面体COQRを考える。それぞれの体積を V_1, V_2 とし、また、 $\triangle OQ'R'$ の面積を S_3 とする。 V_1 について、(2)でOがCに、AがDになった場合を考えると

$$\begin{aligned}V_1 &= \frac{1}{3} CD \cdot S_1 \\ &= \frac{1}{3} CD \cdot S_2\end{aligned}$$

となる。同様に、 V_2 について、(2)でOがCに、AがDに、PがOになった場合を考えると

$$\begin{aligned}V_2 &= \frac{1}{3} CD \cdot S_3 \\ &= \frac{1}{3} CD \cdot S_2\end{aligned}$$

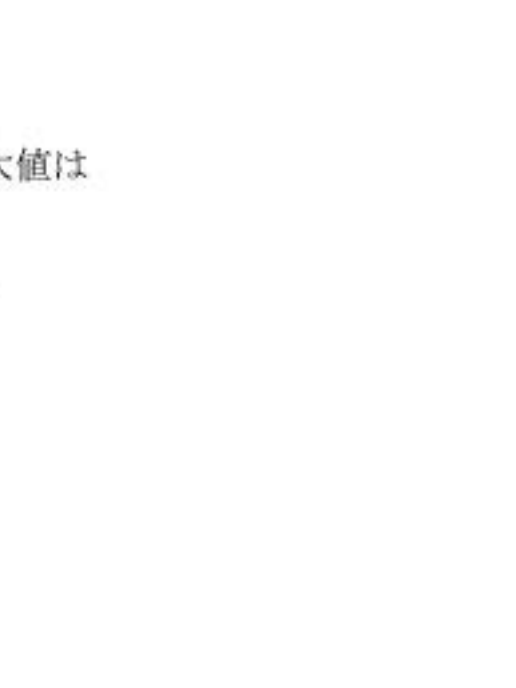
となる。よって、

$$\begin{aligned}V &= V_1 + V_2 \\ &= \frac{1}{3} CD \cdot S_1 + \frac{1}{3} CD \cdot S_3 \\ &= \frac{1}{3} CD \cdot (S_1 + S_3) \\ &= \frac{1}{3} CD \cdot S_2\end{aligned}$$

となる。(2)より $V = \frac{\sqrt{2}}{12}$ であるから

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{2}}{12} &= \frac{1}{3} CD \cdot S_2 \\ \Leftrightarrow S_2 &= \frac{\sqrt{2}}{4CD}\end{aligned}$$

である。したがって、CDが最小となるとき、 S_2 は最大となるため、CDの最小値を求める。



C, Dはそれぞれ、点Bを通り z 軸に平行な直線と直線OP, QRの交点であるから、それぞれ直線OP, QR上の点である。OC, QDの長さをそれぞれ t, s ($0 < t < 1, 0 < s < 1$)とおくと、ベクトルを用いてそれぞれ

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OC} &= t\overrightarrow{OP} \\ \overrightarrow{OD} &= (1-s)\overrightarrow{OQ} + s\overrightarrow{OR}\end{aligned}$$

と表せる。このとき、CDの長さは

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{CD}| &= |-\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}| \\ &= |-t\overrightarrow{OP} + (1-s)\overrightarrow{OQ} + s\overrightarrow{OR}|\end{aligned}$$

となる。これを2乗して、

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{CD}|^2 &= |-t\overrightarrow{OP} + (1-s)\overrightarrow{OQ} + s\overrightarrow{OR}|^2 \\ &= t^2 |\overrightarrow{OP}|^2 + (1-s)^2 |\overrightarrow{OQ}|^2 + s^2 |\overrightarrow{OR}|^2 - 2t(1-s)\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} + 2(1-s)s\overrightarrow{OQ} \cdot \overrightarrow{OR} - 2ts\overrightarrow{OR} \cdot \overrightarrow{OP} \\ &= t^2 + (1-s)^2 + s^2 - t(1-s) + (1-s)s - ts \\ &= t^2 - t + s^2 - s + 1 \\ &= \left(t - \frac{1}{2} \right)^2 + \left(s - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{1}{2}\end{aligned}$$

となる。よって、CDが最小となるのは、 $t = s = \frac{1}{2}$ となる場合であり、その値 $CD_{\min}$ は

$$CD_{\min} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

となる。以上より、 S_2 の最大値は

$$\frac{\sqrt{2}}{4CD_{\min}} = \frac{\sqrt{2}}{4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{2}$$

である。

(証明終)

(答) $\frac{1}{2}$