

1.

(1)

直線 PQ の方程式は

$$\begin{aligned}y &= \frac{2t - (1-t)}{t - (t-1)}(x-t) + 2t \\&= (3t-1)x - 3t^2 + 3t\end{aligned}$$

と表せるため、直線 $x=k$ と直線 PQ の交点の y 座標は

$$y = (3t-1)k - 3t^2 + 3t$$

であり、求める座標は $(k, (3t-1)k - 3t^2 + 3t)$ となる。

$$(\text{答}) \quad (k, (3t-1)k - 3t^2 + 3t)$$

(2)

線分 PQ の方程式は

$$y = (3t-1)x - 3t^2 + 3t \quad (t-1 \leq x \leq t)$$

であるから

$$\begin{aligned}t-1 &\leq a \leq t \\&\Leftrightarrow a \leq t \leq a+1\end{aligned}$$

のとき、線分 PQ と直線 $x=a$ は交点を持つ。(1)より、その交点の y 座標を $Y(t)$ とおくと

$$\begin{aligned}Y(t) &= (3t-1)a - 3t^2 + 3t \\&= -3t^2 + 3(a+1)t - a \\&= -3\left(t - \frac{a+1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}a^2 + \frac{1}{2}a + \frac{3}{4}\end{aligned}$$

となる。以下、 $a \leq t \leq a+1$ と $0 \leq t \leq 1$ を満たす t について $Y(t)$ の取りうる範囲を考える。

[1] $-1 \leq a < 0$ のとき

交点を持つ t の範囲は $0 \leq t \leq a+1$ であるから、

$$\begin{aligned}Y(0) &\leq Y(t) \leq Y\left(\frac{a+1}{2}\right) \\&\Leftrightarrow -a \leq Y(t) \leq \frac{3}{4}a^2 + \frac{1}{2}a + \frac{3}{4}\end{aligned}$$

となる。

[2] $0 \leq a \leq 1$ のとき

交点を持つ t の範囲は $a \leq t \leq 1$ であるから、

$$\begin{aligned}Y(1) &\leq Y(t) \leq Y\left(\frac{a+1}{2}\right) \\&\Leftrightarrow 2a \leq Y(t) \leq \frac{3}{4}a^2 + \frac{1}{2}a + \frac{3}{4}\end{aligned}$$

となる。

以上[1], [2]より、求める範囲は

$$\begin{cases} -a \leq Y(t) \leq \frac{3}{4}a^2 + \frac{1}{2}a + \frac{3}{4} & (-1 \leq a < 0 \text{ のとき}) \\ 2a \leq Y(t) \leq \frac{3}{4}a^2 + \frac{1}{2}a + \frac{3}{4} & (0 \leq a \leq 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

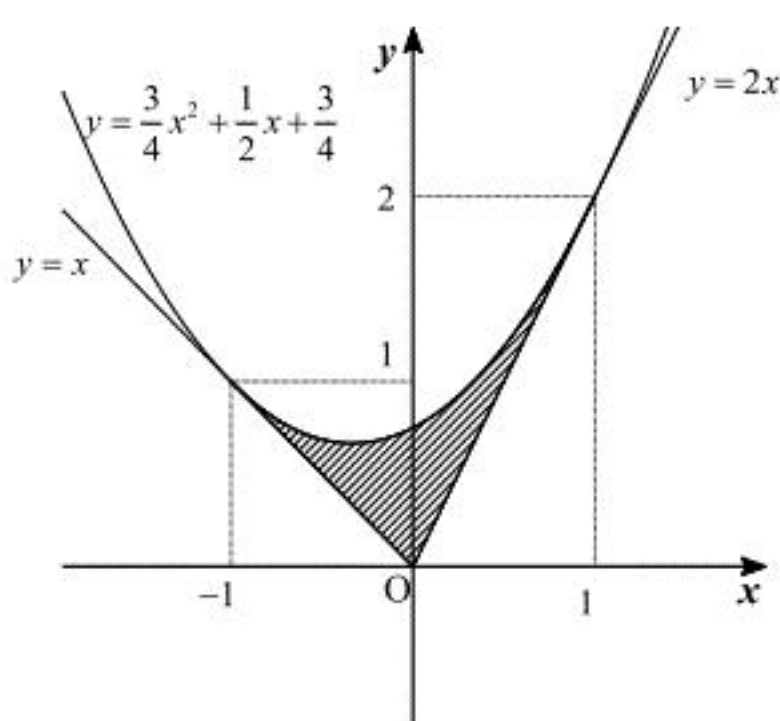
となる。

$$(\text{答}) \quad -a \leq Y(t) \leq \frac{3}{4}a^2 + \frac{1}{2}a + \frac{3}{4} \quad (-1 \leq a < 0)$$

$$2a \leq Y(t) \leq \frac{3}{4}a^2 + \frac{1}{2}a + \frac{3}{4} \quad (0 \leq a \leq 1)$$

(3)

(2)より、求める面積は下図斜線部の面積となる。



よって、求める面積 S は

$$\begin{aligned}S &= \int_{-1}^1 \left(\frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{4} \right) dx - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 \\&= \left[\frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{4}x \right]_{-1}^1 - \frac{1}{2} - 1 \\&= 2 - \frac{3}{2} \\&= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad S = \frac{1}{2}$$

(4)

求める体積は

$$\begin{aligned}&\pi \int_{-1}^1 \left(\frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{4} \right)^2 dx - \frac{1}{3}\pi \cdot 1^2 \cdot 1 - \frac{1}{3}\pi \cdot 2^2 \cdot 1 \\&= 2\pi \int_{-1}^1 \left(\frac{9}{16}x^4 + \frac{3}{4}x^3 + \frac{11}{8}x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{9}{16} \right) dx - \frac{5}{3}\pi \\&= 2\pi \int_0^1 \left(\frac{9}{16}x^4 + \frac{11}{8}x^2 + \frac{9}{16} \right) dx - \frac{5}{3}\pi \\&= 2\pi \left[\frac{9}{80}x^5 + \frac{11}{24}x^3 + \frac{9}{16}x \right]_0^1 - \frac{5}{3}\pi \\&= \frac{3}{5}\pi\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{3}{5}\pi$$

2.

(1)

与式より

$$\begin{aligned}4\overrightarrow{PA}+5\overrightarrow{PB}+6\overrightarrow{PC}&=\vec{0} \\ \Leftrightarrow 4\overrightarrow{PA}+5(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AB})+6(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AC})&=\vec{0} \\ \Leftrightarrow 15\overrightarrow{PA}&=-5\overrightarrow{AB}-6\overrightarrow{AC} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{AP}&=\frac{5\overrightarrow{AB}+6\overrightarrow{AC}}{15}\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{AP}=\frac{5\overrightarrow{AB}+6\overrightarrow{AC}}{15}$$

(2)

直線 AP と直線 BC の交点を E とすると、 $\overrightarrow{AE}$ は $\overrightarrow{AP}$ の定数倍であるから k を実数として

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AE}&=k\overrightarrow{AP} \\ &=\frac{5k\overrightarrow{AB}+6k\overrightarrow{AC}}{15}\end{aligned}$$

である。また、E は直線 BC 上にあるから、

$$\begin{aligned}\frac{5k}{15}+\frac{6k}{15}&=1 \\ \Leftrightarrow \frac{11}{15}k&=1 \\ \Leftrightarrow k&=\frac{15}{11}\end{aligned}$$

となり、 $\overrightarrow{AE}$ は

$$\overrightarrow{AE}=\frac{5\overrightarrow{AB}+6\overrightarrow{AC}}{11}$$

となる。よって、 $AE:AP=15:11$ 、 $BE:EC=6:5$ となる。ここで、 $\triangle ABC$ 、 $\triangle PAB$ 、 $\triangle PBC$ の面積をそれぞれ S 、 S_{PAB} 、 S_{PBC} とすると

$$\begin{aligned}S_{\text{PAB}}&=\frac{BE}{BC}\cdot\frac{AP}{AE}\cdot S \\ &=\frac{6}{11}\cdot\frac{11}{15}S \\ &=\frac{2}{5}S \\ S_{\text{PBC}}&=\frac{PE}{AE}S \\ &=\frac{4}{15}S\end{aligned}$$

となる。よって、 $\triangle PAB$ 、 $\triangle PBC$ の面積比は

$$\frac{2}{5}S:\frac{4}{15}S=3:2$$

となる。

(答) 3:2

(3)

与式より

$$\begin{aligned}4\overrightarrow{QA}+5\overrightarrow{QB}+6\overrightarrow{QC}+7\overrightarrow{QD}&=\vec{0} \\ \Leftrightarrow 22\overrightarrow{QA}&=-5\overrightarrow{AB}-6\overrightarrow{AC}-7\overrightarrow{AD} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{AQ}&=\frac{5\overrightarrow{AB}+6\overrightarrow{AC}+7\overrightarrow{AD}}{22} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{AQ}&=\frac{9}{11}\cdot\frac{5\overrightarrow{AB}+6\overrightarrow{AC}+7\overrightarrow{AD}}{5+6+7}\end{aligned}$$

となるから、

$$\overrightarrow{AF}=\frac{5\overrightarrow{AB}+6\overrightarrow{AC}+7\overrightarrow{AD}}{18}$$

とおくと、F は平面 BCD 上の点である。したがって、四面体 ABCD の体積を V とすると、四面体 QBCD の体積は

$$\frac{11-9}{11}V=\frac{2}{11}V$$

である。同様にして

$$\begin{aligned}\overrightarrow{DQ}&=\frac{4\overrightarrow{DA}+5\overrightarrow{DB}+6\overrightarrow{DC}}{22} \\ &=\frac{15}{22}\cdot\frac{4\overrightarrow{DA}+5\overrightarrow{DB}+6\overrightarrow{DC}}{4+5+6}\end{aligned}$$

であるから、

$$\overrightarrow{DG}=\frac{4\overrightarrow{DA}+5\overrightarrow{DB}+6\overrightarrow{DC}}{15}$$

とおくと、G は平面 ABC 上の点である。したがって、四面体 QABC の体積は

$$\frac{22-15}{22}V=\frac{7}{22}V$$

となる。以上より、四面体 QABC と四面体 QBCD の体積比は

$$\frac{7}{22}V:\frac{2}{11}V=7:4$$

である。

(答) 7:4

3.

(1)

すべての点を区別して考えると、3点の選び方は

$${}_8C_3 = 56 \text{ (通り)}$$

である。円周角の定理より、選ばれた3点によって作られる三角形が直角三角形のとき、その1辺は円の直径となる。 $n=8$ のとき、直径は4本あり、直径をなす2点および残りの6点のうちの1点を選べば直角三角形ができるから、求める確率は

$$\frac{4 \cdot 6}{56} = \frac{3}{7}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad \frac{3}{7}$$

(2)

(1)と同様に考えて、3点の選び方は ${}_nC_3$ 通り、直径をなす2点とその他の1点の選び方は

$\frac{n}{2} \cdot (n-2)$ 通りであるから、求める確率は

$$\begin{aligned} \frac{\frac{n}{2}(n-2)}{{}_nC_3} &= \frac{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot n(n-2)}{2n(n-1)(n-2)} \\ &= \frac{3}{n-1} \end{aligned}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad \frac{3}{n-1}$$

(3)

異なる3点の選び方は ${}_{12}C_3 = 220$ 通りである。 $\triangle ABC$ について、3点ABCは時計回りに配置されており、 $\angle B$ が鈍角であるとする。Aの選び方は12通りであり、残りの2点は時計回りにAの次から連続している5つの頂点のうちの2点を選べばよいから ${}_5C_2 = 10$ 通りである。

よって、求める確率は

$$\frac{12 \cdot 10}{220} = \frac{6}{11}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad \frac{6}{11}$$

4.

(1)

$$\begin{aligned}f'(x) &= e^{\frac{x}{2}} + \frac{1}{2}xe^{\frac{x}{2}} \\&= \left(\frac{x}{2} + 1\right)e^{\frac{x}{2}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f''(x) &= \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}} + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2} + 1\right)e^{\frac{x}{2}} \\&= \left(\frac{x}{4} + 1\right)e^{\frac{x}{2}}\end{aligned}$$

となる。よって、

$$\begin{aligned}f'(2) &= 2e \\f''(2) &= \frac{3}{2}e\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad f'(2) = 2e, \quad f''(2) = \frac{3}{2}e$$

(2)

$g(f(x)) = x$ の両辺を微分することにより

$$g'(f(x))f'(x) = 1$$

を得る。 $x \geq 0$ より $f'(x) > 0$ であるので、

$$g'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)} \quad \cdots \textcircled{1}$$

となる。ここで $f(2) = 2e$ より

$$\begin{aligned}g'(2e) &= g'(f(2)) \\&= \frac{1}{f'(2)} \\&= \frac{1}{2e}\end{aligned}$$

となる。また、①の両辺を微分すると

$$\begin{aligned}g''(f(x))f'(x) &= -\frac{f''(x)}{\{f'(x)\}^2} \\ \Leftrightarrow g''(f(x)) &= -\frac{f''(x)}{\{f'(x)\}^3}\end{aligned}$$

となるので、

$$\begin{aligned}g''(2e) &= g''(f(2)) \\&= -\frac{f''(2)}{\{f'(2)\}^3} \\&= -\frac{\frac{3}{2}e}{(2e)^3} \\&= -\frac{3}{16e^2}\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad g'(2) = \frac{1}{2e}, \quad g''(2) = -\frac{3}{16e^2}$$