1.

(1)

直線PQの方程式は

$$y=\frac{2t-(1-t)}{t-(t-1)}(x-t)+2t$$
$$=(3t-1)x-3t^2+3t$$

と表せるため，直線 $x=k$ と直線PQの交点の y 座標は

$$y=(3t-1)k-3t^2+3t$$

であり，求める座標は $\left(k,\ (3t-1)k-3t^2+3t\right)$ となる。

(答) $\left(k,\ (3t-1)k-3t^2+3t\right)$

(2)

線分PQの方程式は

$$y=(3t-1)x-3t^2+3t\quad (t-1\leqq x\leqq t)$$

であるから

$$t-1\leqq a\leqq t$$
$$\Leftrightarrow a\leqq t\leqq a+1$$

のとき，線分PQと直線 $x=a$ は交点を持つ。(1)より，その交点の y 座標を $Y(t)$ とおくと

$$Y(t)=(3t-1)a-3t^2+3t$$
$$=-3t^2+3(a+1)t-a$$
$$=-3\left(t-\frac{a+1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}a^2+\frac{1}{2}a+\frac{3}{4}$$

となる。以下，$a\leqq t\leqq a+1$ と $0\leqq t\leqq 1$ を満たす t について $Y(t)$ の取りうる範囲を考える。

[1] $-1\leqq a<0$ のとき

交点を持つ t の範囲は $0\leqq t\leqq a+1$ であるから，

$$Y(0)\leqq Y(t)\leqq Y\left(\frac{a+1}{2}\right)$$
$$\Leftrightarrow -a\leqq Y(t)\leqq \frac{3}{4}a^2+\frac{1}{2}a+\frac{3}{4}$$

となる。

[2] $0\leqq a\leqq 1$ のとき

交点を持つ t の範囲は $a\leqq t\leqq 1$ であるから，

$$Y(1)\leqq Y(t)\leqq Y\left(\frac{a+1}{2}\right)$$
$$\Leftrightarrow 2a\leqq Y(t)\leqq \frac{3}{4}a^2+\frac{1}{2}a+\frac{3}{4}$$

となる。

以上[1], [2]より，求める範囲は

$$\begin{cases} -a\leqq Y(t)\leqq \frac{3}{4}a^2+\frac{1}{2}a+\frac{3}{4} & (-1\leqq a<0\text{のとき}) \\ 2a\leqq Y(t)\leqq \frac{3}{4}a^2+\frac{1}{2}a+\frac{3}{4} & (0\leqq a\leqq 1\text{のとき}) \end{cases}$$

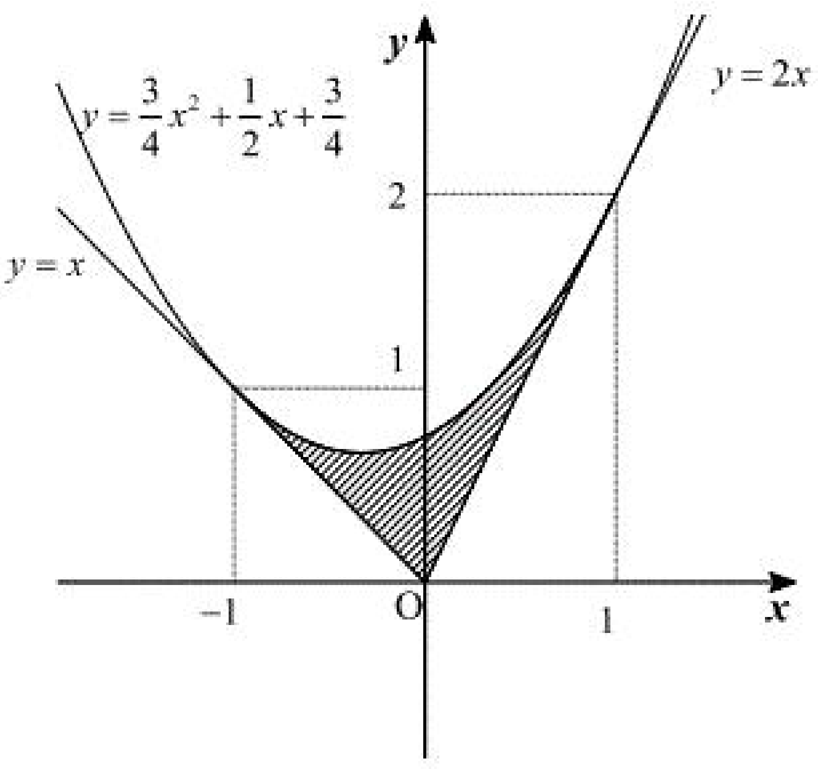
となる。

(答) $-a\leqq Y(t)\leqq \frac{3}{4}a^2+\frac{1}{2}a+\frac{3}{4}\quad (-1\leqq a<0)$

$2a\leqq Y(t)\leqq \frac{3}{4}a^2+\frac{1}{2}a+\frac{3}{4}\quad (0\leqq a\leqq 1)$

(3)

(2)より，求める面積は下図斜線部の面積となる。



よって，求める面積Sは

$$S=\int_{-1}^{1}\left(\frac{3}{4}x^2+\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}\right)dx-\frac{1}{2}\cdot1\cdot1-\frac{1}{2}\cdot1\cdot2$$
$$=\left[\frac{1}{4}x^3+\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{4}x\right]_{-1}^{1}-\frac{1}{2}-1$$
$$=2-\frac{3}{2}$$
$$=\frac{1}{2}$$

となる。

(答) $S=\frac{1}{2}$

2.

(1)

与式より

$$4\overrightarrow{PA}+5\overrightarrow{PB}+6\overrightarrow{PC}=\vec{0}$$
$$\Leftrightarrow 4\overrightarrow{PA}+5\left(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AB}\right)+6\left(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AC}\right)=\vec{0}$$
$$\Leftrightarrow 15\overrightarrow{PA}=-5\overrightarrow{AB}-6\overrightarrow{AC}$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AP}=\frac{5\overrightarrow{AB}+6\overrightarrow{AC}}{15}$$

となる。

(答) $\overrightarrow{AP}=\dfrac{5\overrightarrow{AB}+6\overrightarrow{AC}}{15}$

(2)

直線 AP と直線 BC の交点を E とすると，$\overrightarrow{AE}$ は $\overrightarrow{AP}$ の定数倍であるから k を実数として

$$\overrightarrow{AE}=k\overrightarrow{AP}$$
$$=\frac{5k\overrightarrow{AB}+6k\overrightarrow{AC}}{15}$$

である。また，E は直線 BC 上にあるから，

$$\frac{5k}{15}+\frac{6k}{15}=1$$
$$\Leftrightarrow \frac{11}{15}k=1$$
$$\Leftrightarrow k=\frac{15}{11}$$

となり，$\overrightarrow{AE}$ は

$$\overrightarrow{AE}=\frac{5\overrightarrow{AB}+6\overrightarrow{AC}}{11}$$

となる。よって，$AE:AP=15:11$，$BE:EC=6:5$ となる。ここで，△ABC，△PAB，△PBC の面積をそれぞれ S, S_{PAB}, S_{PBC} とすると

$$S_{PAB}=\frac{BE}{BC}\cdot\frac{AP}{AE}\cdot S$$
$$=\frac{6}{11}\cdot\frac{11}{15}S$$
$$=\frac{2}{5}S$$

$$S_{PBC}=\frac{PE}{AE}S$$
$$=\frac{4}{15}S$$

となる。よって，△PAB，△PBC の面積比は

$$\frac{2}{5}S:\frac{4}{15}S=3:2$$

となる。

(答) 3 : 2

(3)

与式より

$$4\overrightarrow{QA}+5\overrightarrow{QB}+6\overrightarrow{QC}+7\overrightarrow{QD}=\vec{0}$$
$$\Leftrightarrow 22\overrightarrow{QA}=-5\overrightarrow{AB}-6\overrightarrow{AC}-7\overrightarrow{AD}$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AQ}=\frac{5\overrightarrow{AB}+6\overrightarrow{AC}+7\overrightarrow{AD}}{22}$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AQ}=\frac{9}{11}\cdot\frac{5\overrightarrow{AB}+6\overrightarrow{AC}+7\overrightarrow{AD}}{5+6+7}$$

となるから，

$$\overrightarrow{AF}=\frac{5\overrightarrow{AB}+6\overrightarrow{AC}+7\overrightarrow{AD}}{18}$$

とおくと，F は平面 BCD 上の点である。したがって，四面体 ABCD の体積を V とすると，四面体 QBCD の体積は

$$\frac{11-9}{11}V=\frac{2}{11}V$$

である。同様にして

$$\overrightarrow{DQ}=\frac{4\overrightarrow{DA}+5\overrightarrow{DB}+6\overrightarrow{DC}}{22}$$
$$=\frac{15}{22}\cdot\frac{4\overrightarrow{DA}+5\overrightarrow{DB}+6\overrightarrow{DC}}{4+5+6}$$

であるから，

$$\overrightarrow{DG}=\frac{4\overrightarrow{DA}+5\overrightarrow{DB}+6\overrightarrow{DC}}{15}$$

とおくと，G は平面 ABC 上の点である。したがって，四面体 QABC の体積は

$$\frac{22-15}{22}V=\frac{7}{22}V$$

となる。以上より，四面体 QABC と四面体 QBCD の体積比は

$$\frac{7}{22}V:\frac{2}{11}V=7:4$$

である。

(答) 7 : 4

3.

(1)

すべての点を区別して考えると，3 点の選び方は

$${}_8\mathrm{C}_3 = 56\ (\text{通り})$$

である。円周角の定理より，選ばれた 3 点によって作られる三角形が直角三角形のとき，その 1 辺は円の直径となる。$n=8$ のとき，直径は 4 本あり，直径をなす 2 点および残りの 6 点のうちの 1 点を選べば直角三角形ができるから，求める確率は

$$\frac{4\cdot 6}{56} = \frac{3}{7}$$

となる。

(答) $\dfrac{3}{7}$

(2)

(1)と同様に考えて，3 点の選び方は ${}_n\mathrm{C}_3$ 通り，直径をなす 2 点とその他の 1 点の選び方は

$\dfrac{n}{2}\cdot(n-2)$ 通りであるから，求める確率は

$$\frac{\frac{n}{2}(n-2)}{{}_n\mathrm{C}_3} = \frac{3\cdot 2\cdot 1\cdot n(n-2)}{2n(n-1)(n-2)} = \frac{3}{n-1}$$

となる。

(答) $\dfrac{3}{n-1}$

(3)

異なる 3 点の選び方は ${}_{12}\mathrm{C}_3 = 220$ 通りである。△ABC について，3 点 ABC は時計回りに配置されており，∠B が鈍角であるとする。 A の選び方は 12 通りであり，残りの 2 点は時計回りに A の次から連続している 5 つの頂点のうちの 2 点を選べばよいから ${}_5\mathrm{C}_2 = 10$ 通りである。

よって，求める確率は

$$\frac{12\cdot 10}{220} = \frac{6}{11}$$

となる。

(答) $\dfrac{6}{11}$

4.

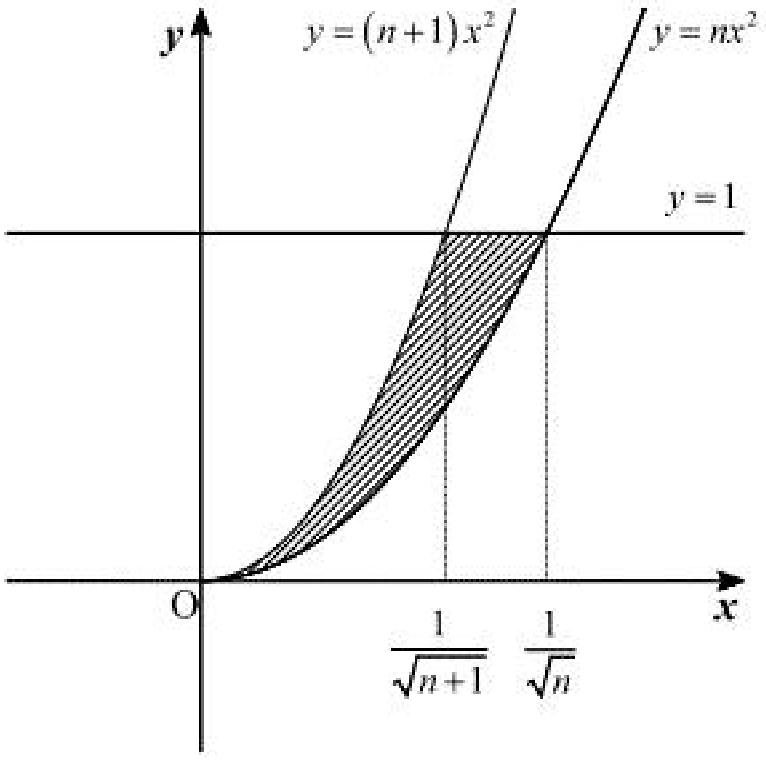
(1)

C_n と L の交点の x 座標は

$$nx^2=1$$
$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{n}x-1\right)\left(\sqrt{n}x+1\right)=0$$

$$\therefore x=\frac{1}{\sqrt{n}}\ (\because x \geqq 0)$$

であり，S_n は下図斜線部の領域の面積である。



よって，

$$\begin{aligned}S_n&=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{n}}}\left(1-nx^2\right)dx-\int_0^{\frac{1}{\sqrt{n+1}}}\left\{1-(n+1)x^2\right\}dx\\&=\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\int_0^{\frac{1}{\sqrt{n}}}nx^2dx\right)-\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}-\int_0^{\frac{1}{\sqrt{n+1}}}(n+1)x^2dx\right)\\&=\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\left[\frac{n}{3}x^3\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{n}}}\right)-\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}-\left[\frac{n+1}{3}x^3\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{n+1}}}\right)\\&=\frac{2}{3\sqrt{n}}-\frac{2}{3\sqrt{n+1}}\\&=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)\end{aligned}$$

となる。

(答) $S_n=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$

(2)

(1)より

$$\begin{aligned}S_n&=\frac{2\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)}{3\sqrt{n(n+1)}}\\&=\frac{2}{3\sqrt{n(n+1)}\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}\end{aligned}$$

となり，数列 $\{S_n\}$ は単調減少であるから，任意の n に対して $S_n>S_{n+1}$ となる。

(証明終)

(3)

(1)より

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}S_k&=\frac{2}{3}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)\\&=\frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)\end{aligned}$$

となるから，

$$\sum_{k=1}^{n}S_k>\frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow \frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)>\frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{n+1}>4$$
$$\Leftrightarrow n>15\ (\because n>0)$$

となる。これを満たす最小の n は16である。

(答) 16