

1.

(1)

仮定より

$$\overrightarrow{OD} = \frac{1}{2}\vec{a}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OE} &= \frac{3}{5}\overrightarrow{OD} + \frac{2}{5}\overrightarrow{OB} \\ &= \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{2}{5}\vec{b} \\ &= \frac{3}{10}\vec{a} + \frac{2}{5}\vec{b}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OF} &= \frac{3}{4}\overrightarrow{OE} + \frac{1}{4}\overrightarrow{OC} \\ &= \frac{3}{4}\left(\frac{3}{10}\vec{a} + \frac{2}{5}\vec{b}\right) + \frac{1}{4}\vec{c} \\ &= \frac{9}{40}\vec{a} + \frac{3}{10}\vec{b} + \frac{1}{4}\vec{c}\end{aligned}$$

となる。点 P は直線 OF 上にあるから、実数  $t$  を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= t\overrightarrow{OF} \\ &= \frac{9}{40}t\vec{a} + \frac{3}{10}t\vec{b} + \frac{1}{4}t\vec{c}\end{aligned}$$

と表すことができる。また、点 P は平面 ABC 上にあるので、

$$\begin{aligned}\frac{9}{40}t + \frac{3}{10}t + \frac{1}{4}t &= 1 \\ \Leftrightarrow t &= \frac{40}{31}\end{aligned}$$

となる。よって

$$\overrightarrow{OP} = \frac{9}{31}\vec{a} + \frac{12}{31}\vec{b} + \frac{10}{31}\vec{c}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{OP} = \frac{9}{31}\vec{a} + \frac{12}{31}\vec{b} + \frac{10}{31}\vec{c}$$

(2)

$\sqrt{x^2 + 84}$  が整数となるとき、0 以上の整数  $n$  を用いて

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2 + 84} &= n \\ \Leftrightarrow x^2 + 84 &= n^2 \\ \Leftrightarrow (n-x)(n+x) &= 2^2 \cdot 3 \cdot 7 \quad \cdots \textcircled{1}\end{aligned}$$

となる。 $n > x$  より  $n+x$  と  $n-x$  はともに正であり、

$$(n+x) + (n-x) = 2n$$

より  $n+x$  と  $n-x$  の偶奇は等しい。したがって、 $n+x \geq n-x > 0$  に注意すると、 $\textcircled{1}$  より

$$\begin{aligned}(n-x, n+x) &= (2, 42), (6, 14) \\ \Leftrightarrow (n, x) &= (22, 20), (10, 4)\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad x = 4, 20$$

2.

(1)

真数条件より

$$x-1, x+9 > 0$$

$$\Leftrightarrow x > 1$$

となる。与式より

$$\log_3(x-1) + \log_9(x+9) - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\log_9(x-1)}{\log_9 3} + \log_9(x+9) = 1$$

$$\Leftrightarrow \log_9(x-1)^2(x+9) = 1$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2(x+9) = 9$$

$$\Leftrightarrow x^3 + 7x^2 - 17x = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x^2 + 7x - 17) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0, \frac{-7 \pm 3\sqrt{13}}{2}$$

となるが、 $3 < \sqrt{13} < 4$  より真数条件  $x > 1$  を満たすものは

$$x = \frac{-7 + 3\sqrt{13}}{2}$$

である。

$$(\text{答}) \quad x = \frac{-7 + 3\sqrt{13}}{2}$$

(2)

$x$  の範囲は  $0 < x < \frac{1}{2}$  である。四角錐の底面は、対角線の長さが  $1-2x$  の正方形であり、その面積は

$$\frac{1}{2}(1-2x)^2$$

である。側面の二等辺三角形の等しい辺の長さは  $\sqrt{x^2 + \frac{1}{4}}$  であるから、四角錐の高さは三平方の定理より

$$\sqrt{x^2 + \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - x\right)^2} = \sqrt{x}$$

となる。よって四角錐の体積  $V$  は

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \sqrt{x} \cdot \frac{1}{2} (1-2x)^2 \\ &= \frac{\sqrt{x}(1-2x)^2}{6} \end{aligned}$$

となる。ここで

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dx} &= \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(1-2x)^2 - 4\sqrt{x}(1-2x)}{6} \\ &= \frac{(1-2x)(1-10x)}{12\sqrt{x}} \end{aligned}$$

であるから、 $V$  の増減は下のようになる。

|                 |                                                                                     |                                                                                     |                          |                                                                                     |                                                                                      |
|-----------------|-------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|
| $x$             | 0                                                                                   | ...                                                                                 | $\frac{1}{10}$           | ...                                                                                 | $\frac{1}{2}$                                                                        |
| $\frac{dV}{dx}$ |  | +                                                                                   | 0                        | -                                                                                   |  |
| $V$             |  |  | $\frac{4\sqrt{10}}{375}$ |  |  |

よって  $V$  は  $x = \frac{1}{10}$  のとき最大値  $\frac{4\sqrt{10}}{375}$  をとる。

$$(\text{答}) \quad \frac{4\sqrt{10}}{375}$$

### 3.

(1)

すべての点を区別して考えると、3点の選び方は

$${}_8C_3 = 56 \text{ (通り)}$$

である。円周角の定理より、選ばれた3点によって作られる三角形が直角三角形のとき、その1辺は円の直径となる。 $n=8$ のとき、直径は4本あり、直径をなす2点および残りの6点のうちの1点を選べば直角三角形ができるから、求める確率は

$$\frac{4 \cdot 6}{56} = \frac{3}{7}$$

となる。

(答)  $\frac{3}{7}$

(2)

(1)と同様に考えて、3点の選び方は ${}_nC_3$ 通り、直径をなす2点とその他の1点の選び方は

$\frac{n}{2} \cdot (n-2)$ 通りであるから、求める確率は

$$\begin{aligned} \frac{\frac{n}{2}(n-2)}{{}_nC_3} &= \frac{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot n(n-2)}{2n(n-1)(n-2)} \\ &= \frac{3}{n-1} \end{aligned}$$

となる。

(答)  $\frac{3}{n-1}$

(3)

異なる3点の選び方は ${}_{12}C_3 = 220$ 通りである。 $\triangle ABC$ について、3点ABCは時計回りに配置されており、 $\angle B$ が鈍角であるとする。Aの選び方は12通りであり、残りの2点は時計回りにAの次から連続している5つの頂点のうちの2点を選べばよいから ${}_5C_2 = 10$ 通りである。よって、求める確率は

$$\frac{12 \cdot 10}{220} = \frac{6}{11}$$

となる。

(答)  $\frac{6}{11}$

4.

(1)

$f(x)$  は  $x = -1, 0, 2$  で極値をもつから、実数  $a, C$  ( $a \neq 0$ ) を用いて

$$\begin{aligned}f'(x) &= ax(x+1)(x-2) \\ &= ax^3 - ax^2 - 2ax\end{aligned}$$

$$\therefore f(x) = \frac{a}{4}x^4 - \frac{a}{3}x^3 - ax^2 + C$$

と表すことができる。ここで、 $y = f(x)$  は点  $(2, 1), \left(-1, \frac{13}{4}\right)$  を通ることから

$$\begin{aligned}&\begin{cases} f(2) = 1 \\ f(-1) = \frac{13}{4} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{8}{3}a + C = 1 \\ -\frac{5}{12}a + C = \frac{13}{4} \end{cases} \\ &\therefore (a, C) = \left(1, \frac{11}{3}\right)\end{aligned}$$

となるので、

$$\therefore f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x^2 + \frac{11}{3}$$

となる。また、 $f(0) = k$  より

$$k = \frac{11}{3}$$

である。

$$(\text{答}) \quad f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x^2 + \frac{11}{3}, \quad k = \frac{11}{3}$$

(2)

点  $A(2, 1)$  を原点  $O(0, 0)$  に移動させることから、 $y = g(x)$  のグラフは  $y = f(x)$  のグラフを  $x$  軸方向に  $-2$ 、 $y$  軸方向に  $-1$  だけ平行移動したものであるので、

$$\begin{aligned}g(x) &= f(x+2) - 1 \\ &= \frac{1}{4}(x+2)^4 - \frac{1}{3}(x+2)^3 - (x+2)^2 + \frac{11}{3} - 1 \\ &= \frac{1}{4}x^4 + \frac{5}{3}x^3 + 3x^2\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad y = \frac{1}{4}x^4 + \frac{5}{3}x^3 + 3x^2$$

(3)

$g(x) = px^2$  について

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}x^4 + \frac{5}{3}x^3 + 3x^2 &= px^2 \\ \Leftrightarrow 3x^4 + 20x^3 + 36x^2 &= 12px^2 \\ \Leftrightarrow x^2(3x^2 + 20x - 12p + 36) &= 0\end{aligned}$$

となる。よって 2 曲線  $y = g(x)$ ,  $y = px^2$  が原点以外で共有点を持たないとき、2 次方程式  $3x^2 + 20x - 12p + 36 = 0$  は  $x = 0$  以外の解を持たない。この 2 次方程式が  $x = 0$  を重解に持つことはないため、判別式  $D$  を考えて

$$\begin{aligned}D &< 0 \\ \Leftrightarrow 10^2 - 3(36 - 12p) &< 0 \\ \Leftrightarrow p &< \frac{2}{9}\end{aligned}$$

となる。 $y = px^2$  は放物線であるから、 $p \neq 0$  に注意すると求める条件は

$$p \neq 0 \text{ かつ } p < \frac{2}{9}$$

である。

$$(\text{答}) \quad p \neq 0 \text{ かつ } p < \frac{2}{9}$$