

1.
(1)

直線 ℓ は傾き m で、点 $A\left(-1, \frac{1}{2}\right)$ を通るため、直線 ℓ を表す方程式は

$$y = m(x+1) + \frac{1}{2}$$

となる。したがって、 C と ℓ の交点は

$$\begin{aligned} \begin{cases} y = \frac{x^2}{2} \\ y = m(x+1) + \frac{1}{2} \end{cases} \\ \Rightarrow \frac{x^2}{2} = m(x+1) + \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow (x+1)\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{2} - m\right) = 0 \\ \therefore x = -1, 2m+1 \quad (\because m > 0) \end{aligned}$$

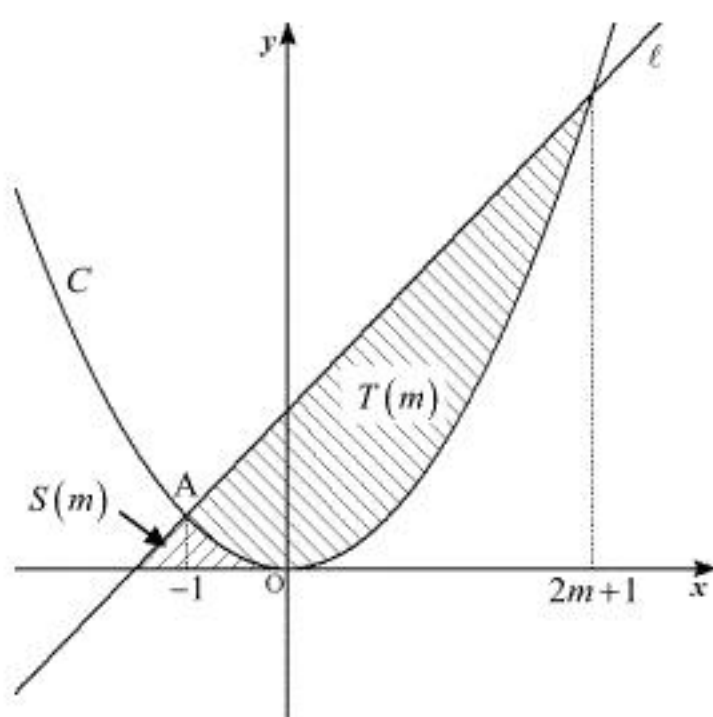
となる。したがって、交点の x 座標は $x = -1, 2m+1$ であるから、交点の座標は

$$\left(-1, \frac{1}{2}\right), \left(2m+1, 2m^2 + 2m + \frac{1}{2}\right)$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \left(-1, \frac{1}{2}\right), \left(2m+1, 2m^2 + 2m + \frac{1}{2}\right)$$

(2)



直線 ℓ と x 軸との交点は

$$\begin{aligned} 0 &= m(x+1) + \frac{1}{2} \\ \therefore x &= -1 - \frac{1}{2m} \quad (\because m > 0) \end{aligned}$$

より、

$$\begin{aligned} S(m) &= \frac{1}{2} \cdot \left\{ -1 - \left(-\frac{1}{2m} - 1 \right) \right\} \cdot \frac{1}{2} + \int_{-1}^0 \frac{x^2}{2} dx \\ &= \frac{1}{8m} + \left[\frac{x^3}{6} \right]_{-1}^0 \\ &= \frac{1}{8m} + \frac{1}{6} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad S(m) = \frac{1}{8m} + \frac{1}{6}$$

(3)

$$\begin{aligned} T(m) &= \int_{-1}^{2m+1} \left\{ m(x+1) + \frac{1}{2} - \frac{x^2}{2} \right\} dx \\ &= \int_{-1}^{2m+1} -\frac{1}{2}(x+1)(x-2m-1) dx \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{(2m+2)^3}{6} \\ &= \frac{2}{3}(m+1)^3 \end{aligned}$$

より、

$$\begin{aligned} \frac{T(m)}{mS(m)} &= 18 \\ \Leftrightarrow \frac{2(m+1)^3}{3m\left(\frac{1}{8m} + \frac{1}{6}\right)} &= 18 \\ \Leftrightarrow 8m^3 + 24m^2 - 12m - 19 &= 0 \end{aligned}$$

となる。ここで、

$$f(m) = 8m^3 + 24m^2 - 12m - 19$$

とおくと、

$$\begin{aligned} f'(m) &= 24m^2 + 48m - 12 \\ &= 12(2m^2 + 4m - 1) \end{aligned}$$

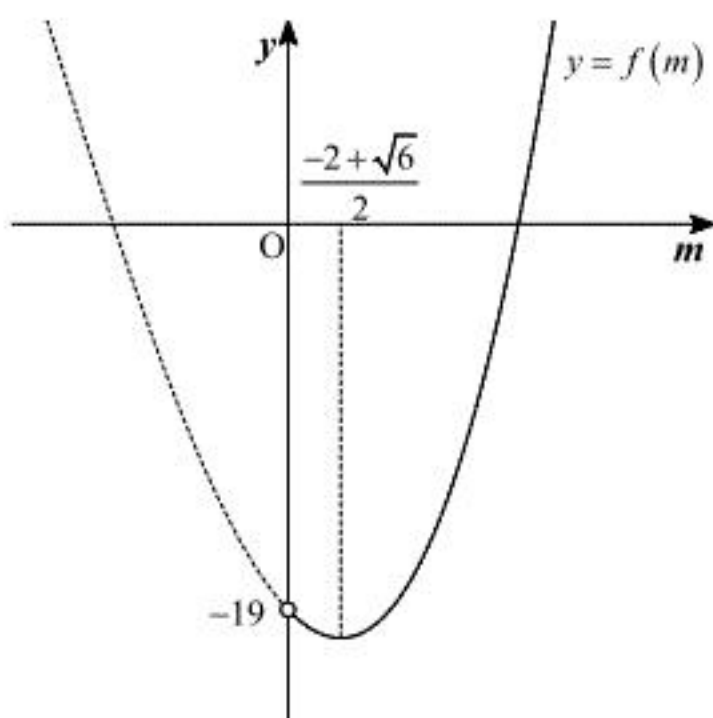
であり、

$$\begin{aligned} f'(m) &= 0 \\ \Leftrightarrow m &= \frac{-2 \pm \sqrt{6}}{2} \end{aligned}$$

より、 $m > 0$ における増減表を作ると、

m	(0)	$\dots$	$\frac{-2+\sqrt{6}}{2}$	$\dots$
$f'(m)$	$\nearrow$	$-$	0	$+$
$f(m)$	(-19)	$\searrow$		$\nearrow$

となる。よって、 $y = f(m)$ のグラフを描くと以下ようになる。



したがって、 $f(m) = 0$ をみたす m ($m > 0$) はただ一つ存在し、

$$\begin{aligned} f(1) &= 1 > 0 \\ f\left(\frac{9}{10}\right) &= -\frac{566}{125} < 0 \end{aligned}$$

より、 $\frac{9}{10} < m < 1$ であることがわかる。したがって、求める n は $n = 9$ とわかる。

$$(\text{答}) \quad n = 9$$

2.

(1)

すべての n に対して $a_n \neq 0$ であることを数学的帰納法を用いて示す。

[1] $n=1$ のとき

$a_1 = 1$ より成り立つ。

[2] $n=k$ のとき成立すると仮定する。

即ち、 $a_k \neq 0$ である。ここで、 $a_{k+1} \neq 0$ であることを背理法を用いて示す。もし、 $a_{k+1} = 0$ であると仮定すると

$$\frac{a_k - 3a_{k+1}}{4(k+1)} = a_k a_{k+1}$$

が成り立つから、右辺は 0 となる。したがって、左辺も 0 となるはずだが、左辺は

$$\frac{a_k}{4(k+1)} \neq 0 \quad (\because a_k \neq 0)$$

より、これは矛盾である。したがって、 $a_{k+1} \neq 0$ であり、これは $n=k+1$ のときに成立することを示す。

以上[1][2]より、数学的帰納法より、すべての n に対して $a_n \neq 0$ であることが示された。

(証明終)

(2)

$$\frac{a_n - 3a_{n+1}}{4(n+1)} = a_n a_{n+1}$$

$$\Leftrightarrow a_n - 3a_{n+1} = 4(n+1)a_n a_{n+1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{a_{n+1}} - \frac{3}{a_n} = 4(n+1) \quad (\because a_n \neq 0, a_{n+1} \neq 0)$$

であるから、

$$b_n = \frac{1}{a_n} + 2n$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{a_n} = b_n - 2n$$

を代入すると

$$\{b_{n+1} - 2(n+1)\} - 3(b_n - 2n) = 4(n+1)$$

$$\Leftrightarrow b_{n+1} = 3b_n + 6$$

となる。

(答) $b_{n+1} = 3b_n + 6$

(3)

$$b_{n+1} = 3b_n + 6$$

$$\Leftrightarrow b_{n+1} + 3 = 3(b_n + 3)$$

と変形すると、数列 $\{b_n + 3\}$ は公比 3、初項 $b_1 + 3 = \frac{1}{a_1} + 2 + 3 = 6$ の等比数列より、

$$b_n + 3 = 6 \cdot 3^{n-1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{a_n} + 2n + 3 = 2 \cdot 3^n$$

$$\therefore a_n = \frac{1}{2 \cdot 3^n - 2n - 3}$$

となる。

(答) $a_n = \frac{1}{2 \cdot 3^n - 2n - 3}$

3.

(1)

$\overrightarrow{OC}$ と $\overrightarrow{CB}$ は垂直より、内積は0であることを利用する。 $|\overrightarrow{OA_1}|=|\overrightarrow{OA_2}|=1$,

$\overrightarrow{OA_1} \cdot \overrightarrow{OB} = c_1, \overrightarrow{OA_2} \cdot \overrightarrow{OB} = c_2$ であることに注意すると、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OA_1} \cdot \overrightarrow{OA_2} &= |\overrightarrow{OA_1}| |\overrightarrow{OA_2}| \cos \theta \\ &= \cos \theta \end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{CB} &= (c_1 \overrightarrow{OA_1} + c_2 \overrightarrow{OA_2}) \cdot (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}) \\ &= (c_1 \overrightarrow{OA_1} + c_2 \overrightarrow{OA_2}) \cdot (\overrightarrow{OB} - c_1 \overrightarrow{OA_1} - c_2 \overrightarrow{OA_2}) \\ &= c_1^2 - c_1^2 - c_1 c_2 \cos \theta + c_2^2 - c_1 c_2 \cos \theta - c_2^2 \\ &= -2c_1 c_2 \cos \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore -2c_1 c_2 \cos \theta &= 0 \\ \Leftrightarrow \cos \theta &= 0 \quad (\because c_1 \neq 0, c_2 \neq 0) \end{aligned}$$

となる。よって、 $0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}$ より、 $\theta = \frac{\pi}{2}$ となる。

$$(答) \quad \theta = \frac{\pi}{2}$$

(2)

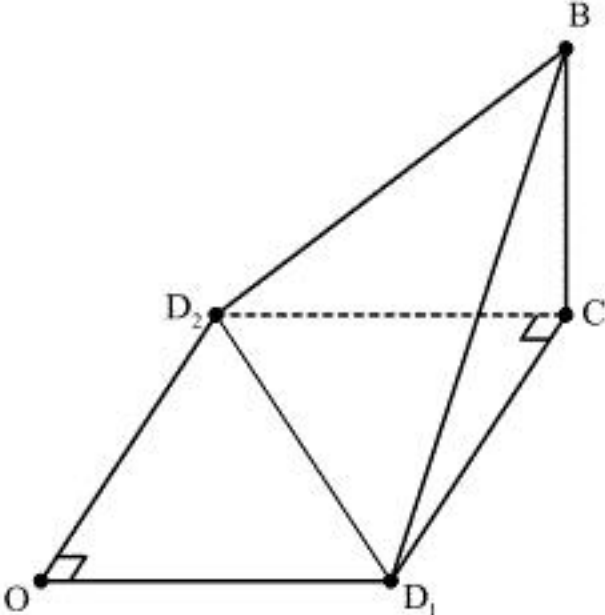
点Cは $\overrightarrow{OC} = c_1 \overrightarrow{OA_1} + c_2 \overrightarrow{OA_2}$ と表すことができるため平面H上にあるが、点Bは平面H上にな
いため、 $|\overrightarrow{CB}| > 0$ である。したがって、 $\overrightarrow{OC}$ と $\overrightarrow{CB}$ は垂直より、三角形BOCに三平方の定理を
用いて、

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{OB}|^2 &= |\overrightarrow{OC}|^2 + |\overrightarrow{CB}|^2 \\ &> |\overrightarrow{OC}|^2 \\ &= |c_1 \overrightarrow{OA_1} + c_2 \overrightarrow{OA_2}|^2 \\ &= c_1^2 + c_2^2 + 2c_1 c_2 \cos \theta \\ &= c_1^2 + c_2^2 \quad (\because \cos \theta = 0) \end{aligned}$$

となり題意が示された。

(証明終)

(3)



$$\begin{aligned} \overrightarrow{OD_1} \cdot \overrightarrow{BC} &= c \overrightarrow{OA_1} \cdot (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}) \\ &= c \overrightarrow{OA_1} \cdot (c \overrightarrow{OA_1} + c \overrightarrow{OA_2} - \overrightarrow{OB}) \\ &= c^2 + 0 - c^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

であり、同様にして、 $\overrightarrow{OD_2} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ である。したがって、 $\overrightarrow{BC}$ は平面Hに垂直である。そこで、
四面体D₁D₂CBについて、△D₁D₂Cを底面とみなすと辺BCは高さと一致する。底面は
 $\overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{OA_2}$ が直交することに注意すると直角二等辺三角形であり、その面積は

$$\frac{1}{2} |\overrightarrow{CD_1}| |\overrightarrow{CD_2}| = \frac{c^2}{2}$$

となる。また、高さは

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{BC}|^2 &= |\overrightarrow{OB}|^2 - |\overrightarrow{OC}|^2 \\ &= b^2 - 2c^2 \\ \therefore |\overrightarrow{BC}| &= \sqrt{b^2 - 2c^2} \end{aligned}$$

となる。したがって、四面体D₁D₂CBの体積は

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{c^2}{2} \cdot \sqrt{b^2 - 2c^2} = \frac{c^2 \sqrt{b^2 - 2c^2}}{6}$$

となる。

$$(答) \quad \frac{c^2 \sqrt{b^2 - 2c^2}}{6}$$

(4)

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{BD_1}|^2 &= |\overrightarrow{OD_1} - \overrightarrow{OB}|^2 \\ &= |\overrightarrow{OD_1}|^2 + |\overrightarrow{OB}|^2 - 2\overrightarrow{OD_1} \cdot \overrightarrow{OB} \\ &= c^2 + b^2 - 2c^2 \\ &= b^2 - c^2 \end{aligned}$$

であり、同様にして $|\overrightarrow{BD_2}|^2 = b^2 - c^2$ である。また、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BD_1} \cdot \overrightarrow{BD_2} &= (\overrightarrow{OD_1} - \overrightarrow{OB}) \cdot (\overrightarrow{OD_2} - \overrightarrow{OB}) \\ &= \overrightarrow{OD_1} \cdot \overrightarrow{OD_2} - \overrightarrow{OD_1} \cdot \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OD_2} + |\overrightarrow{OB}|^2 \\ &= 0 - c^2 - c^2 + b^2 \\ &= b^2 - 2c^2 \end{aligned}$$

より、△D₁D₂Bの面積は

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{BD_1}|^2 |\overrightarrow{BD_2}|^2 - (\overrightarrow{BD_1} \cdot \overrightarrow{BD_2})^2} &= \frac{1}{2} \sqrt{(b^2 - c^2)^2 - (b^2 - 2c^2)^2} \\ &= \frac{c}{2} \sqrt{2b^2 - 3c^2} \end{aligned}$$

となる。したがって、CTの長さは四面体D₁D₂CBの体積を△D₁D₂Bを底面とみなすことで、

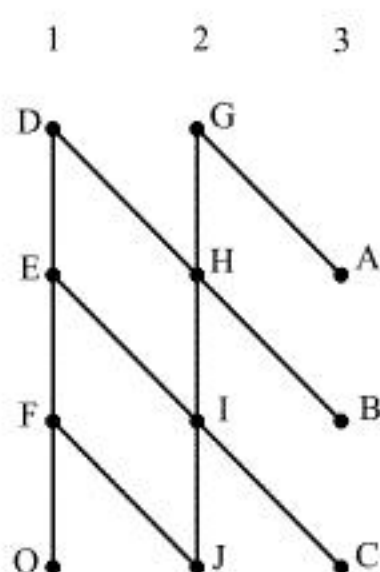
$$\begin{aligned} \frac{c}{2} \sqrt{2b^2 - 3c^2} \cdot CT \cdot \frac{1}{3} &= \frac{c^2 \sqrt{b^2 - 2c^2}}{6} \\ \therefore CT &= \frac{c \sqrt{b^2 - 2c^2}}{\sqrt{2b^2 - 3c^2}} \end{aligned}$$

となる。

$$(答) \quad CT = \frac{c \sqrt{b^2 - 2c^2}}{\sqrt{2b^2 - 3c^2}}$$

4.

(1)



上図のように各頂点に名前を付ける。頂点 A に到達する道筋は (O)FEDH(GA), (O)FEIH(GA), (O)FJIH(GA) の 3 通りあるため、それぞれの確率を足し合わせて、

$$P_A = \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{5}{16}$$

となる。頂点 B に到達する道筋は (O)FEDH(B), (O)FEIH(B), (O)FJIH(B) の 3 通りあるため、それぞれの確率を足し合わせて、

$$P_B = \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{5}{16}$$

となる。頂点 C に到達する道筋は (O)FEI(C), (O)FJI(C) の 2 通りあるため、それぞれの確率を足し合わせて、

$$P_C = \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{8}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad P_A = \frac{5}{16}, P_B = \frac{5}{16}, P_C = \frac{3}{8}$$

(2)

C_1, C_2 をともに通過して C に到達する確率は、O から C_1 に到達し、 C_1 から C_2 に到達したあと、 C_2 から C に到達する確率に等しい。図 1 と見比べることで、これは P_C^3 に等しい。したがって、答えは $\left(\frac{3}{8}\right)^3 = \frac{27}{512}$ となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{27}{512}$$

(3)

B_1, B_2 をともに通過して B に到達する確率は、O から B_1 、 B_1 から B_2 、 B_2 から B に到達する確率に等しい。図 2 を見ると、 C_1 に到達したら、そのあと必ず B_1 を通ることに注意すると、O から B_1 に到達する確率は $P_B + P_C$ に等しいことがわかる。また、図 1 で OF は必ず通るから、O から B, C に到達する確率と、F から B, C に到達する確率は等しい。したがって、 B_1 から B_2 に到達する確率は、O から B_1 に到達する確率に等しくて $P_B + P_C$ となる。同様にして、 B_2 から B に到達する確率は P_B となる。したがって、答えは $(P_B + P_C)^2 P_B = \frac{605}{4096}$ となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{605}{4096}$$