1.

(1)

直線ℓは傾きmで，点$\mathrm{A}\left(-1, \dfrac{1}{2}\right)$を通るため，直線$\ell$を表す方程式は

$$y = m(x+1) + \frac{1}{2}$$

となる。したがって，Cとℓの交点は

$$\begin{cases} y = \dfrac{x^2}{2} \\ y = m(x+1) + \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{2} = m(x+1) + \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow (x+1)\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{2} - m\right) = 0$$

$$\therefore x = -1,\ 2m+1 \ (\because m > 0)$$

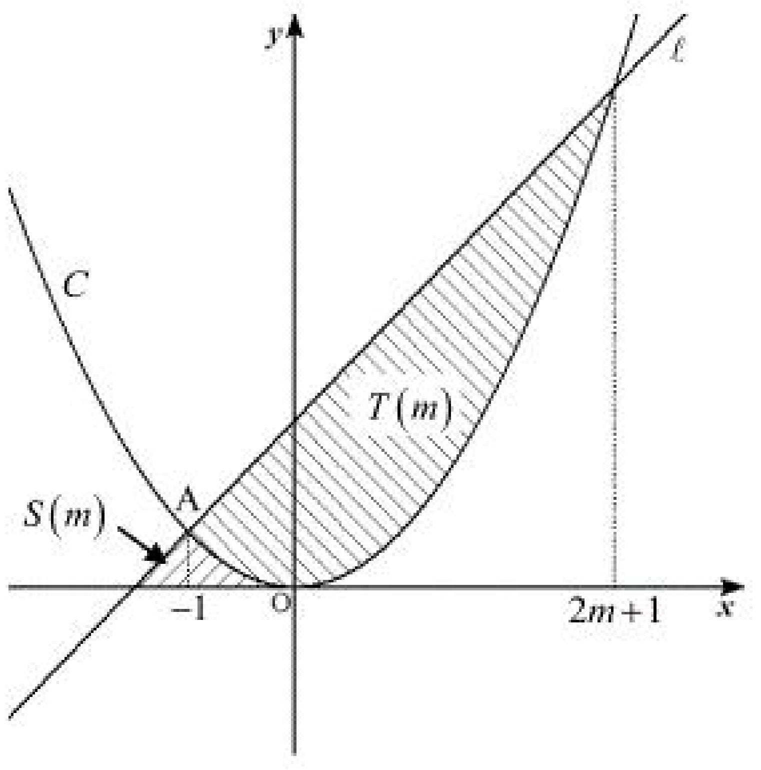
となる。したがって，交点のx座標は$x = -1,\ 2m+1$であるから，交点の座標は

$$\left(-1, \frac{1}{2}\right), \left(2m+1,\ 2m^2 + 2m + \frac{1}{2}\right)$$

となる。

(答) $\left(-1, \dfrac{1}{2}\right), \left(2m+1,\ 2m^2 + 2m + \dfrac{1}{2}\right)$

(2)



直線ℓとx軸との交点は

$$0 = m(x+1) + \frac{1}{2}$$

$$\therefore x = -1 - \frac{1}{2m} \ (\because m > 0)$$

より，

$$S(m) = \frac{1}{2} \cdot \left\{-1 - \left(-\frac{1}{2m} - 1\right)\right\} \cdot \frac{1}{2} + \int_{-1}^{0} \frac{x^2}{2}\,dx$$

$$= \frac{1}{8m} + \left[\frac{x^3}{6}\right]_{-1}^{0}$$

$$= \frac{1}{8m} + \frac{1}{6}$$

となる。

(答) $S(m) = \dfrac{1}{8m} + \dfrac{1}{6}$

(3)

$$T(m) = \int_{-1}^{2m+1} \left\{m(x+1) + \frac{1}{2} - \frac{x^2}{2}\right\} dx$$

$$= \int_{-1}^{2m+1} -\frac{1}{2}(x+1)(x-2m-1)\,dx$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{(2m+2)^3}{6}$$

$$= \frac{2}{3}(m+1)^3$$

より，

$$\frac{T(m)}{mS(m)} = 18$$

$$\Leftrightarrow \frac{2(m+1)^3}{3m\left(\dfrac{1}{8m} + \dfrac{1}{6}\right)} = 18$$

$$\Leftrightarrow 8m^3 + 24m^2 - 12m - 19 = 0$$

となる。ここで，

$$f(m) = 8m^3 + 24m^2 - 12m - 19$$

とおくと，

$$f'(m) = 24m^2 + 48m - 12$$

$$= 12\left(2m^2 + 4m - 1\right)$$

であり，

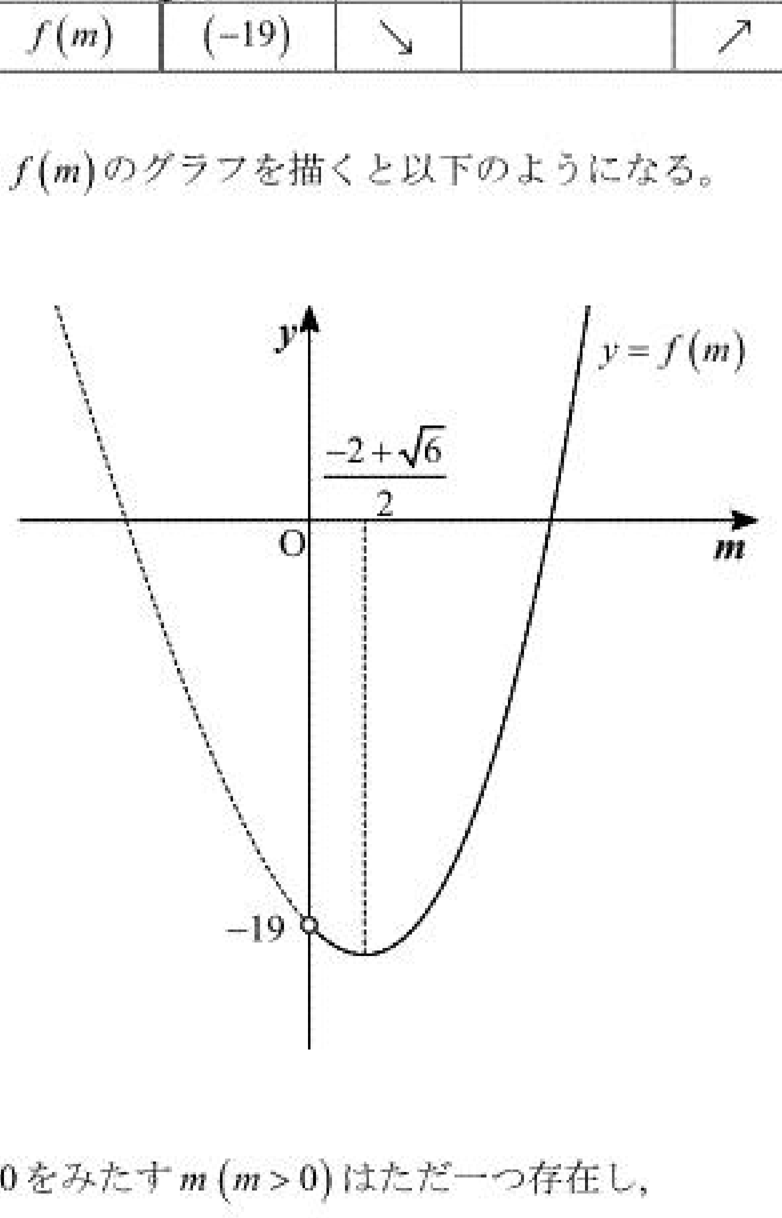
$$f'(m) = 0$$

$$\Leftrightarrow m = \frac{-2 \pm \sqrt{6}}{2}$$

より，$m > 0$における増減表を作ると，

m	(0)	$\cdots$	$\dfrac{-2+\sqrt{6}}{2}$	$\cdots$
$f'(m)$		$-$	0	$+$
$f(m)$	(-19)	↘		↗

となる。よって，$y = f(m)$のグラフを描くと以下のようになる。



したがって，$f(m) = 0$をみたす$m\ (m > 0)$はただ一つ存在し，

$$f(1) = 1 > 0$$

$$f\left(\frac{9}{10}\right) = -\frac{566}{125} < 0$$

より，$\dfrac{9}{10} < m < 1$であることがわかる。したがって，求めるnは$n = 9$とわかる。

(答) $n = 9$

2.

(1)

$$
\begin{aligned}
2\cos^2 t+2\sin t\cos t-1 &= 2\cdot\frac{1+\cos 2t}{2}+\sin 2t-1\\
&=\sin 2t+\cos 2t\\
&=\sqrt{2}\sin\left(2t+\frac{\pi}{4}\right)
\end{aligned}
$$

であり，$\frac{\pi}{2}\leqq t\leqq\frac{3}{4}\pi$ のとき，$\frac{5}{4}\pi\leqq 2t+\frac{\pi}{4}\leqq\frac{7}{4}\pi$ より，$\sin\left(2t+\frac{\pi}{4}\right)<0$ であることに注意して，

$$
\begin{aligned}
f\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{4}\pi}\left|\sqrt{2}\sin\left(2t+\frac{\pi}{4}\right)\right|dt\\
&=-\sqrt{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{4}\pi}\sin\left(2t+\frac{\pi}{4}\right)dt\\
&=-\sqrt{2}\left[-\frac{1}{2}\cos\left(2t+\frac{\pi}{4}\right)\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{4}\pi}\\
&=1
\end{aligned}
$$

となる。

(答) $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$

(2)

x の範囲で場合分けをする。

[1] $0\leqq x\leqq\frac{\pi}{8}$ のとき

$$
\begin{aligned}
2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\frac{\pi}{4} &= 2x+\frac{3}{4}\pi\\
&\leqq\frac{\pi}{4}+\frac{3}{4}\pi\\
&=\pi
\end{aligned}
$$

より，$x\leqq t\leqq x+\frac{\pi}{4}$ のとき，$\sin\left(2t+\frac{\pi}{4}\right)\geqq 0$ であることに注意して，

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \int_x^{x+\frac{\pi}{4}}\left|\sqrt{2}\sin\left(2t+\frac{\pi}{4}\right)\right|dt\\
&=\sqrt{2}\int_x^{x+\frac{\pi}{4}}\sin\left(2t+\frac{\pi}{4}\right)dt\\
&=\sqrt{2}\left[-\frac{1}{2}\cos\left(2t+\frac{\pi}{4}\right)\right]_x^{x+\frac{\pi}{4}}\\
&=-\frac{\sqrt{2}}{2}\left\{\cos\left(2x+\frac{3}{4}\pi\right)-\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\right\}\\
&=-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\left\{-2\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right\}\quad(\because \text{和積公式})\\
&=\cos 2x
\end{aligned}
$$

と求まる。

[2] $\frac{\pi}{8}\leqq x\leqq\frac{3}{8}\pi$ のとき

$$
\begin{aligned}
2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\frac{\pi}{4} &= 2x+\frac{3}{4}\pi\\
&\geqq\frac{\pi}{4}+\frac{3}{4}\pi\\
&=\pi
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
2x+\frac{\pi}{4} &\leqq\frac{3}{4}\pi+\frac{\pi}{4}\\
&=\pi
\end{aligned}
$$

より，積分区間に関して，$x\leqq t\leqq\frac{3}{8}\pi$ のとき $\sin\left(2t+\frac{\pi}{4}\right)\geqq 0$，$\frac{3}{8}\pi\leqq t\leqq x+\frac{\pi}{4}$ のとき $\sin\left(2t+\frac{\pi}{4}\right)\leqq 0$ であることに注意して，

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \int_x^{x+\frac{\pi}{4}}\left|\sqrt{2}\sin\left(2t+\frac{\pi}{4}\right)\right|dt\\
&=\sqrt{2}\left\{\int_x^{\frac{3}{8}\pi}\sin\left(2t+\frac{\pi}{4}\right)dt-\int_{\frac{3}{8}\pi}^{x+\frac{\pi}{4}}\sin\left(2t+\frac{\pi}{4}\right)dt\right\}\\
&=\sqrt{2}\left\{\left[-\frac{1}{2}\cos\left(2t+\frac{\pi}{4}\right)\right]_x^{\frac{3}{8}\pi}-\left[-\frac{1}{2}\cos\left(2t+\frac{\pi}{4}\right)\right]_{\frac{3}{8}\pi}^{x+\frac{\pi}{4}}\right\}\\
&=\frac{\sqrt{2}}{2}\left\{2+\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(2x+\frac{3}{4}\pi\right)\right\}\\
&=\frac{\sqrt{2}}{2}\left\{2+2\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right\}\\
&=\sqrt{2}-\sin 2x
\end{aligned}
$$

と求まる。

[3] $\frac{3}{8}\pi\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}$ のとき

$$
\begin{aligned}
2x+\frac{\pi}{4} &\geqq\frac{3}{4}\pi+\frac{\pi}{4}\\
&=\pi
\end{aligned}
$$

より，$x\leqq t\leqq x+\frac{\pi}{4}$ のとき，$\sin\left(2t+\frac{\pi}{4}\right)\leqq 0$ であることに注意して，

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \int_x^{x+\frac{\pi}{4}}\left|\sqrt{2}\sin\left(2t+\frac{\pi}{4}\right)\right|dt\\
&=-\sqrt{2}\int_x^{x+\frac{\pi}{4}}\sin\left(2t+\frac{\pi}{4}\right)dt\\
&=-\cos 2x
\end{aligned}
$$

と求まる。

以上[1][2][3]より，

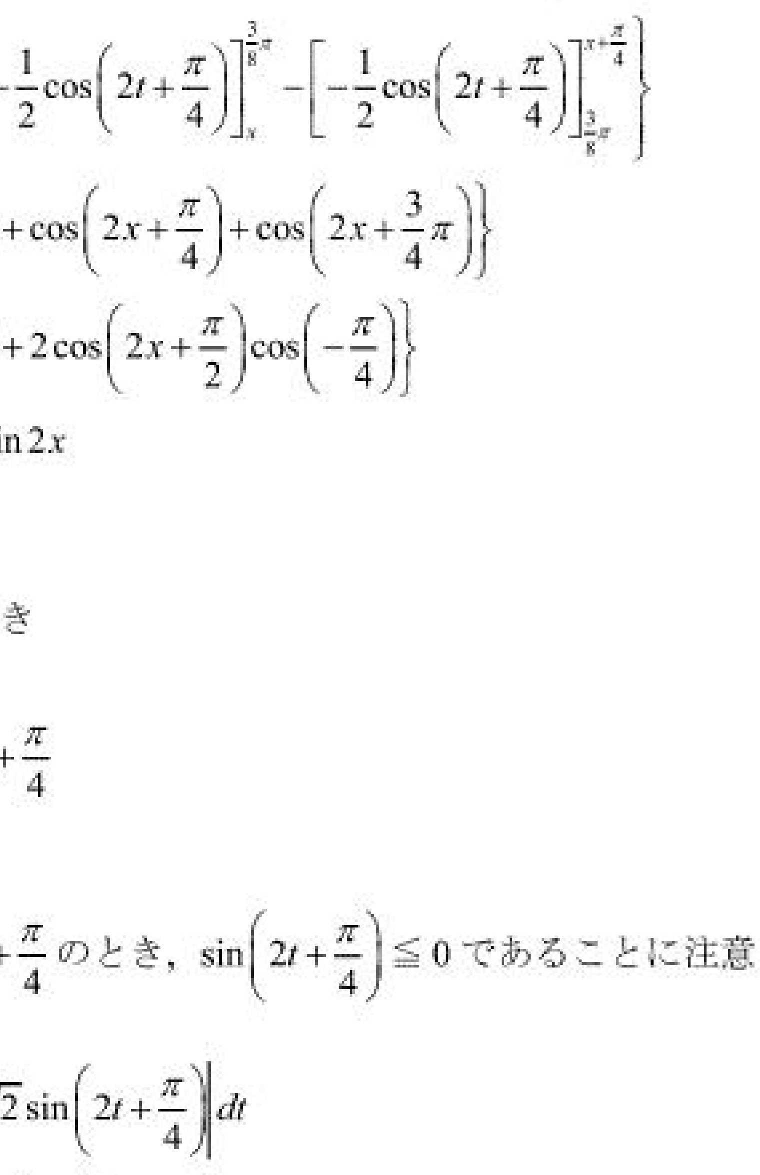
$$
f(x)=\begin{cases}
\cos 2x & \left(0\leqq x\leqq\frac{\pi}{8}\right)\\
\sqrt{2}-\sin 2x & \left(\frac{\pi}{8}\leqq x\leqq\frac{3}{8}\pi\right)\\
-\cos 2x & \left(\frac{3}{8}\pi\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}\right)
\end{cases}
$$

となる。

(答) 前表

(3)

(2)をもとに $y=f(x)$ のグラフを描くと以下のようになる。

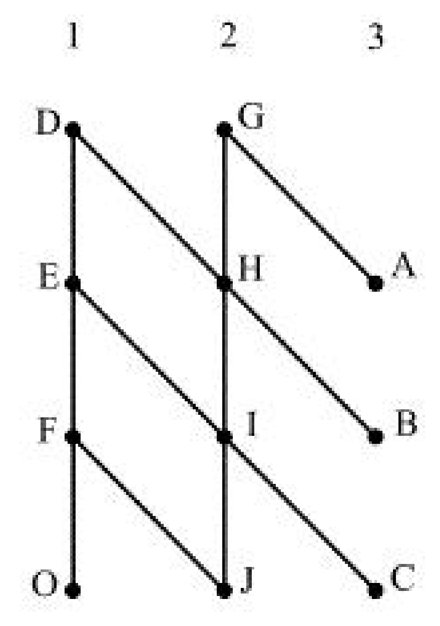


したがって，$f(x)$ の最大値は1で，そのとき x の値は $x=0,\ \frac{\pi}{2}$ であり，$f(x)$ の最小値は $\sqrt{2}-1$ で，そのときの x の値は $x=\frac{\pi}{4}$ である。

(答) 最大値: $1\left(x=0,\ \frac{\pi}{2}\right)$，最小値: $\sqrt{2}-1\left(x=\frac{\pi}{4}\right)$

3.

(1)



上図のように各頂点に名前を付ける。頂点Aに到達する道筋は$(\mathrm{O})\mathrm{FEDH}(\mathrm{GA}), (\mathrm{O})\mathrm{FEIH}(\mathrm{GA}), (\mathrm{O})\mathrm{FJIH}(\mathrm{GA})$の3通りあるため，それぞれの確率を足し合わせて，

$$P_{\mathrm{A}} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{5}{16}$$

となる。頂点Bに到達する道筋は$(\mathrm{O})\mathrm{FEDH}(\mathrm{B}), (\mathrm{O})\mathrm{FEIH}(\mathrm{B}), (\mathrm{O})\mathrm{FJIH}(\mathrm{B})$の3通りあるため，それぞれの確率を足し合わせて，

$$P_{\mathrm{B}} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{5}{16}$$

となる。頂点Cに到達する道筋は$(\mathrm{O})\mathrm{FEI}(\mathrm{C}), (\mathrm{O})\mathrm{FJI}(\mathrm{C})$の2通りあるため，それぞれの確率を足し合わせて，

$$P_{\mathrm{C}} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{8}$$

となる。

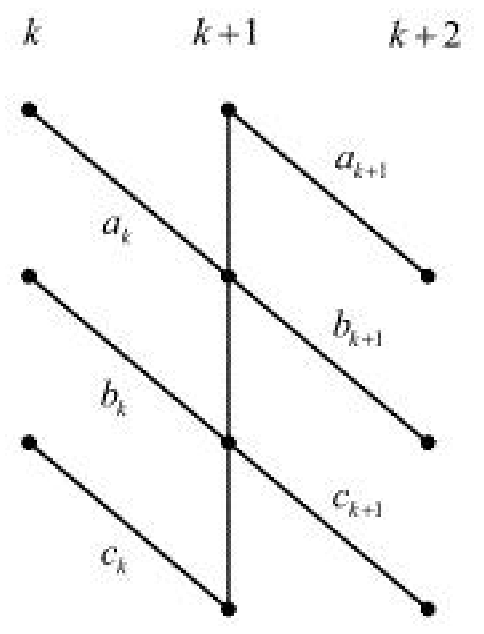
(答) $P_{\mathrm{A}} = \frac{5}{16}, P_{\mathrm{B}} = \frac{5}{16}, P_{\mathrm{C}} = \frac{3}{8}$

(2)

$\mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2$をともに通過してCに到達する確率は，Oから$\mathrm{C}_1$に到達し，$\mathrm{C}_1$から$\mathrm{C}_2$に到達したあと，$\mathrm{C}_2$からCに到達する確率に等しい。図1と見比べることで，これは$P_C{}^3$に等しい。したがって，答えは$\left(\frac{3}{8}\right)^3 = \frac{27}{512}$となる。

(答) $\frac{27}{512}$

(3)



上図のそれぞれの辺を通る確率を上のように定義すると，図から

$$c_{k+1} = \frac{b_k + c_k}{2}$$
$$b_{k+1} = \frac{a_k}{2} + \frac{b_k + c_k}{4}$$
$$a_{k+1} = \frac{a_k}{2} + \frac{b_k + c_k}{4}$$

という漸化式が得られ，$a_{k+1} = b_{k+1}$である。ここで，

$$a_1 = \frac{1}{4}$$
$$b_1 = \frac{1}{4}$$
$$c_1 = \frac{1}{2}$$

であるから，任意の自然数nについて$a_n = b_n$である。これを再び上の漸化式に代入して

$$b_{k+1} = \frac{3}{4}b_k + \frac{1}{4}c_k$$
$$c_{k+1} = \frac{1}{2}b_k + \frac{1}{2}c_k$$

を得る。ここで，求めたい答えはb_6であることに注意すると，実際に書き出して

n	1	2	3	4	5	6
b_n	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{21}{64}$	$\frac{85}{256}$	$\frac{341}{1024}$	$\frac{1365}{4096}$
c_n	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{11}{32}$	$\frac{43}{128}$	$\frac{171}{512}$	$\frac{683}{2048}$

を得る。したがって，答えは$\frac{1365}{4096}$となる。

(答) $\frac{1365}{4096}$

4.

(1)

$\overrightarrow{OC}$ と $\overrightarrow{CB}$ は垂直より，内積は 0 であることを利用する。$\left|\overrightarrow{OA_1}\right|=\left|\overrightarrow{OA_2}\right|=1$，

$\overrightarrow{OA_1}\cdot\overrightarrow{OB}=c_1,\ \overrightarrow{OA_2}\cdot\overrightarrow{OB}=c_2$ であることに注意すると，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA_1}\cdot\overrightarrow{OA_2}&=\left|\overrightarrow{OA_1}\right|\left|\overrightarrow{OA_2}\right|\cos\theta\\&=\cos\theta\end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{CB}&=\left(c_1\overrightarrow{OA_1}+c_2\overrightarrow{OA_2}\right)\cdot\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}\right)\\&=\left(c_1\overrightarrow{OA_1}+c_2\overrightarrow{OA_2}\right)\cdot\left(\overrightarrow{OB}-c_1\overrightarrow{OA_1}-c_2\overrightarrow{OA_2}\right)\\&=c_1{}^2-c_1{}^2-c_1c_2\cos\theta+c_2{}^2-c_1c_2\cos\theta-c_2{}^2\\&=-2c_1c_2\cos\theta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\therefore -2c_1c_2\cos\theta=0\\&\Leftrightarrow \cos\theta=0\ (\because c_1\neq 0,\ c_2\neq 0)\end{aligned}$$

となる。よって，$0<\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ より $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ となる。

(答) $\theta=\dfrac{\pi}{2}$

(2)

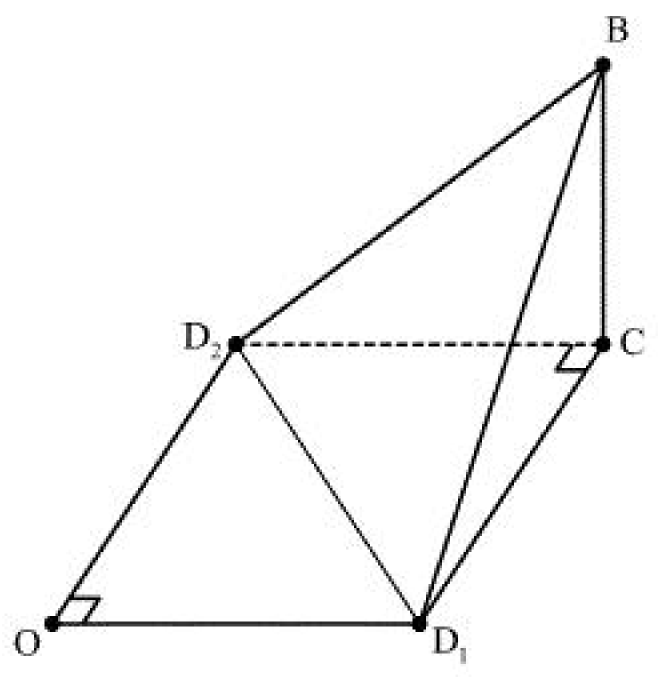
点 C は $\overrightarrow{OC}=c_1\overrightarrow{OA_1}+c_2\overrightarrow{OA_2}$ と表すことができるため平面 H 上にあるが，点 B は平面 H 上にないため，$\left|\overrightarrow{CB}\right|>0$ である。したがって，$\overrightarrow{OC}$ と $\overrightarrow{CB}$ は垂直より，三角形 BOC に三平方の定理を用いて，

$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{OB}\right|^2&=\left|\overrightarrow{OC}\right|^2+\left|\overrightarrow{CB}\right|^2\\&>\left|\overrightarrow{OC}\right|^2\\&=\left|c_1\overrightarrow{OA_1}+c_2\overrightarrow{OA_2}\right|^2\\&=c_1{}^2+c_2{}^2+2c_1c_2\cos\theta\\&=c_1{}^2+c_2{}^2\ (\because\cos\theta=0)\end{aligned}$$

となり題意が示された。

(証明終)

(3)



$$\begin{aligned}\overrightarrow{OD_1}\cdot\overrightarrow{BC}&=c\overrightarrow{OA_1}\cdot\left(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}\right)\\&=c\overrightarrow{OA_1}\cdot\left(c\overrightarrow{OA_1}+c\overrightarrow{OA_2}-\overrightarrow{OB}\right)\\&=c^2+0-c^2\\&=0\end{aligned}$$

であり，同様にして，$\overrightarrow{OD_2}\cdot\overrightarrow{BC}=0$ である。したがって，$\overrightarrow{BC}$ は平面 H に垂直である。そこで，四面体 D_1D_2CB について，$\triangle D_1D_2C$ を底面とみなすと辺 BC は高さと一致する。 底面は $\overrightarrow{OA_1},\overrightarrow{OA_2}$ が直交することに注意すると直角二等辺三角形であり，その面積は

$$\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{CD_1}\right|\left|\overrightarrow{CD_2}\right|=\frac{c^2}{2}$$

となる。また，高さは

$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{BC}\right|^2&=\left|\overrightarrow{OB}\right|^2-\left|\overrightarrow{OC}\right|^2\\&=b^2-2c^2\end{aligned}$$

$$\therefore\left|\overrightarrow{BC}\right|=\sqrt{b^2-2c^2}$$

となる。したがって，四面体 D_1D_2CB の体積は

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{c^2}{2}\cdot\sqrt{b^2-2c^2}=\frac{c^2\sqrt{b^2-2c^2}}{6}$$

となる。

(答) $\dfrac{c^2\sqrt{b^2-2c^2}}{6}$

(4)

$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{BD_1}\right|^2&=\left|\overrightarrow{OD_1}-\overrightarrow{OB}\right|^2\\&=\left|\overrightarrow{OD_1}\right|^2+\left|\overrightarrow{OB}\right|^2-2\overrightarrow{OD_1}\cdot\overrightarrow{OB}\\&=c^2+b^2-2c^2\\&=b^2-c^2\end{aligned}$$

であり，同様にして $\left|\overrightarrow{BD_2}\right|^2=b^2-c^2$ である。また，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BD_1}\cdot\overrightarrow{BD_2}&=\left(\overrightarrow{OD_1}-\overrightarrow{OB}\right)\cdot\left(\overrightarrow{OD_2}-\overrightarrow{OB}\right)\\&=\overrightarrow{OD_1}\cdot\overrightarrow{OD_2}-\overrightarrow{OD_1}\cdot\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OD_2}+\left|\overrightarrow{OB}\right|^2\\&=0-c^2-c^2+b^2\\&=b^2-2c^2\end{aligned}$$

より，$\triangle D_1D_2B$ の面積は

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{BD_1}\right|^2\left|\overrightarrow{BD_2}\right|^2-\left(\overrightarrow{BD_1}\cdot\overrightarrow{BD_2}\right)^2}&=\frac{1}{2}\sqrt{\left(b^2-c^2\right)^2-\left(b^2-2c^2\right)^2}\\&=\frac{c}{2}\sqrt{2b^2-3c^2}\end{aligned}$$

となる。したがって，CT の長さは四面体 D_1D_2CB の体積を $\triangle D_1D_2B$ を底面とみなすことで，

$$\frac{c}{2}\sqrt{2b^2-3c^2}\cdot \mathrm{CT}\cdot\frac{1}{3}=\frac{c^2\sqrt{b^2-2c^2}}{6}$$

$$\therefore \mathrm{CT}=\frac{c\sqrt{b^2-2c^2}}{\sqrt{2b^2-3c^2}}$$

となる。

(答) $\mathrm{CT}=\dfrac{c\sqrt{b^2-2c^2}}{\sqrt{2b^2-3c^2}}$