

1.

(1)(a)

$\vec{p} = -\vec{a} + 3\vec{b}$, $5\vec{q} = \vec{a} + 3\vec{b}$ より, 辺々の和をとると

$$\vec{p} + 5\vec{q} = 6\vec{b}$$

$$\therefore \vec{b} = \frac{1}{6}(\vec{p} + 5\vec{q})$$

となり, 辺々の差をとると

$$5\vec{q} - \vec{p} = 2\vec{a}$$

$$\therefore \vec{a} = \frac{1}{2}(-\vec{p} + 5\vec{q})$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \vec{a} = \frac{1}{2}(-\vec{p} + 5\vec{q}), \vec{b} = \frac{1}{6}(\vec{p} + 5\vec{q})$$

(b)

$|\vec{p}| = 5, |\vec{q}| = 2$ であることに注意して,

$$\sqrt{2}|\vec{a}| = 3|\vec{b}|$$

$$\Leftrightarrow 2|\vec{a}|^2 = 9|\vec{b}|^2$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot \frac{1}{4}(|\vec{p}|^2 + 25|\vec{q}|^2 - 10\vec{p} \cdot \vec{q}) = 9 \cdot \frac{1}{36}(|\vec{p}|^2 + 25|\vec{q}|^2 + 10\vec{p} \cdot \vec{q})$$

$$\Leftrightarrow 30\vec{p} \cdot \vec{q} = 125 \quad (\because |\vec{p}| = 5, |\vec{q}| = 2)$$

$$\therefore \vec{p} \cdot \vec{q} = \frac{25}{6}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \vec{p} \cdot \vec{q} = \frac{25}{6}$$

(2)(a)

$$t = \cos x - \sin x$$

$$= \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{3}{4}\pi\right)$$

と変形できるから, $0 \leq x \leq 2\pi$ のとき t の取り得る範囲は $-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}$ となる。また,

$$\begin{aligned} t^2 &= \cos^2 x + \sin^2 x - 2\sin x \cos x \\ &= 1 - \sin 2x \end{aligned}$$

より,

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin 2x + \sqrt{6}(\cos x - \sin x) - \frac{7}{4} \\ &= 1 - t^2 + \sqrt{6}t - \frac{7}{4} \\ &= -t^2 + \sqrt{6}t - \frac{3}{4} \end{aligned}$$

と表すことができる。

$$(\text{答}) \quad -\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}, \quad f(x) = -t^2 + \sqrt{6}t - \frac{3}{4}$$

(b)

$$f(x) = -t^2 + \sqrt{6}t - \frac{3}{4}$$

$$= -\left(t - \frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$$

と平方完成できる。したがって, 最大値は

$$t = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{3}{4}\pi\right) = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{3}{4}\pi\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore x = \frac{19}{12}\pi, \frac{23}{12}\pi \quad (\because 0 \leq x \leq 2\pi)$$

のとき $\frac{3}{4}$ であり, 最小値は

$$t = -\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{3}{4}\pi\right) = -\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{3}{4}\pi\right) = -1$$

$$\therefore x = \frac{3}{4}\pi \quad (\because 0 \leq x \leq 2\pi)$$

のとき $-2\sqrt{3} - \frac{11}{4}$ となる。

$$(\text{答}) \quad \text{最大値: } \frac{3}{4}\left(x = \frac{19}{12}\pi, \frac{23}{12}\pi\right), \text{ 最小値: } -2\sqrt{3} - \frac{11}{4}\left(x = \frac{3}{4}\pi\right)$$

2.

(1)

すべての n に対して $a_n \neq 0$ であることを数学的帰納法を用いて示す。

[1] $n=1$ のとき

$a_1=1$ より成り立つ。

[2] $n=k$ のとき成立すると仮定する。

即ち、 $a_k \neq 0$ である。ここで、 $a_{k+1} \neq 0$ であることを背理法を用いて示す。もし、 $a_{k+1}=0$ であると仮定すると

$$\frac{a_k - 3a_{k+1}}{4(k+1)} = a_k a_{k+1}$$

が成り立つから、右辺は 0 となる。したがって、左辺も 0 となるはずだが、左辺は

$$\frac{a_k}{4(k+1)} \neq 0 \quad (\because a_k \neq 0)$$

より、これは矛盾である。したがって、 $a_{k+1} \neq 0$ であり、これは $n=k+1$ のときに成立することを示す。

以上[1][2]より、数学的帰納法より、すべての n に対して $a_n \neq 0$ であることが示された。

(証明終)

(2)

$$\frac{a_n - 3a_{n+1}}{4(n+1)} = a_n a_{n+1}$$

$$\Leftrightarrow a_n - 3a_{n+1} = 4(n+1)a_n a_{n+1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{a_{n+1}} - \frac{3}{a_n} = 4(n+1) \quad (\because a_n \neq 0, a_{n+1} \neq 0)$$

であるから、

$$b_n = \frac{1}{a_n} + 2n$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{a_n} = b_n - 2n$$

を代入すると

$$\{b_{n+1} - 2(n+1)\} - 3(b_n - 2n) = 4(n+1)$$

$$\Leftrightarrow b_{n+1} = 3b_n + 6$$

となる。

(答) $b_{n+1} = 3b_n + 6$

(3)

$$b_{n+1} = 3b_n + 6$$

$$\Leftrightarrow b_{n+1} + 3 = 3(b_n + 3)$$

と変形すると、数列 $\{b_n + 3\}$ は公比 3、初項 $b_1 + 3 = \frac{1}{a_1} + 2 + 3 = 6$ の等比数列より、

$$b_n + 3 = 6 \cdot 3^{n-1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{a_n} + 2n + 3 = 2 \cdot 3^n$$

$$\therefore a_n = \frac{1}{2 \cdot 3^n - 2n - 3}$$

となる。

(答) $a_n = \frac{1}{2 \cdot 3^n - 2n - 3}$

3.

(1)

$$\begin{aligned} 2\cos^2 t + 2\sin t \cos t - 1 &= 2 \cdot \frac{1 + \cos 2t}{2} + \sin 2t - 1 \\ &= \sin 2t + \cos 2t \\ &= \sqrt{2} \sin\left(2t + \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

であり、 $\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{3}{4}\pi$ のとき、 $\frac{5}{4}\pi \leq 2t + \frac{\pi}{4} \leq \frac{7}{4}\pi$ より、 $\sin\left(2t + \frac{\pi}{4}\right) < 0$ であることに注意し

て、

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{4}\pi} \left| \sqrt{2} \sin\left(2t + \frac{\pi}{4}\right) \right| dt \\ &= -\sqrt{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{4}\pi} \sin\left(2t + \frac{\pi}{4}\right) dt \\ &= -\sqrt{2} \left[-\frac{1}{2} \cos\left(2t + \frac{\pi}{4}\right) \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{4}\pi} \\ &= 1 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

(2)

x の範囲で場合分けをする。

[1] $0 \leq x \leq \frac{\pi}{8}$ のとき

$$\begin{aligned} 2\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\pi}{4} &= 2x + \frac{3}{4}\pi \\ &\leq \frac{\pi}{4} + \frac{3}{4}\pi \\ &= \pi \end{aligned}$$

より、 $x \leq t \leq x + \frac{\pi}{4}$ のとき、 $\sin\left(2t + \frac{\pi}{4}\right) \geq 0$ であることに注意して、

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_x^{x+\frac{\pi}{4}} \left| \sqrt{2} \sin\left(2t + \frac{\pi}{4}\right) \right| dt \\ &= \sqrt{2} \int_x^{x+\frac{\pi}{4}} \sin\left(2t + \frac{\pi}{4}\right) dt \\ &= \sqrt{2} \left[-\frac{1}{2} \cos\left(2t + \frac{\pi}{4}\right) \right]_x^{x+\frac{\pi}{4}} \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{2} \left\{ \cos\left(2x + \frac{3}{4}\pi\right) - \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) \right\} \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left\{ -2 \sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right\} \quad (\because \text{和積公式}) \\ &= \cos 2x \end{aligned}$$

と求まる。

[2] $\frac{\pi}{8} \leq x \leq \frac{3}{8}\pi$ のとき

$$\begin{aligned} 2\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\pi}{4} &= 2x + \frac{3}{4}\pi \\ &\geq \frac{\pi}{4} + \frac{3}{4}\pi \\ &= \pi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x + \frac{\pi}{4} &\leq \frac{3}{4}\pi + \frac{\pi}{4} \\ &= \pi \end{aligned}$$

より、積分区間に関して、 $x \leq t \leq \frac{3}{8}\pi$ のとき $\sin\left(2t + \frac{\pi}{4}\right) \geq 0$ 、 $\frac{3}{8}\pi \leq t \leq x + \frac{\pi}{4}$ のとき

$\sin\left(2t + \frac{\pi}{4}\right) \leq 0$ であることに注意して、

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_x^{x+\frac{\pi}{4}} \left| \sqrt{2} \sin\left(2t + \frac{\pi}{4}\right) \right| dt \\ &= \sqrt{2} \left\{ \int_x^{\frac{3}{8}\pi} \sin\left(2t + \frac{\pi}{4}\right) dt - \int_{\frac{3}{8}\pi}^{x+\frac{\pi}{4}} \sin\left(2t + \frac{\pi}{4}\right) dt \right\} \\ &= \sqrt{2} \left\{ \left[-\frac{1}{2} \cos\left(2t + \frac{\pi}{4}\right) \right]_x^{\frac{3}{8}\pi} - \left[-\frac{1}{2} \cos\left(2t + \frac{\pi}{4}\right) \right]_{\frac{3}{8}\pi}^{x+\frac{\pi}{4}} \right\} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \left\{ 2 + \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(2x + \frac{3}{4}\pi\right) \right\} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \left\{ 2 + 2 \cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right\} \\ &= \sqrt{2} - \sin 2x \end{aligned}$$

と求まる。

[3] $\frac{3}{8}\pi \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ のとき

$$\begin{aligned} 2x + \frac{\pi}{4} &\geq \frac{3}{4}\pi + \frac{\pi}{4} \\ &= \pi \end{aligned}$$

より、 $x \leq t \leq x + \frac{\pi}{4}$ のとき、 $\sin\left(2t + \frac{\pi}{4}\right) \leq 0$ であることに注意して、

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_x^{x+\frac{\pi}{4}} \left| \sqrt{2} \sin\left(2t + \frac{\pi}{4}\right) \right| dt \\ &= -\sqrt{2} \int_x^{x+\frac{\pi}{4}} \sin\left(2t + \frac{\pi}{4}\right) dt \\ &= -\cos 2x \end{aligned}$$

と求まる。

以上[1][2][3]より、

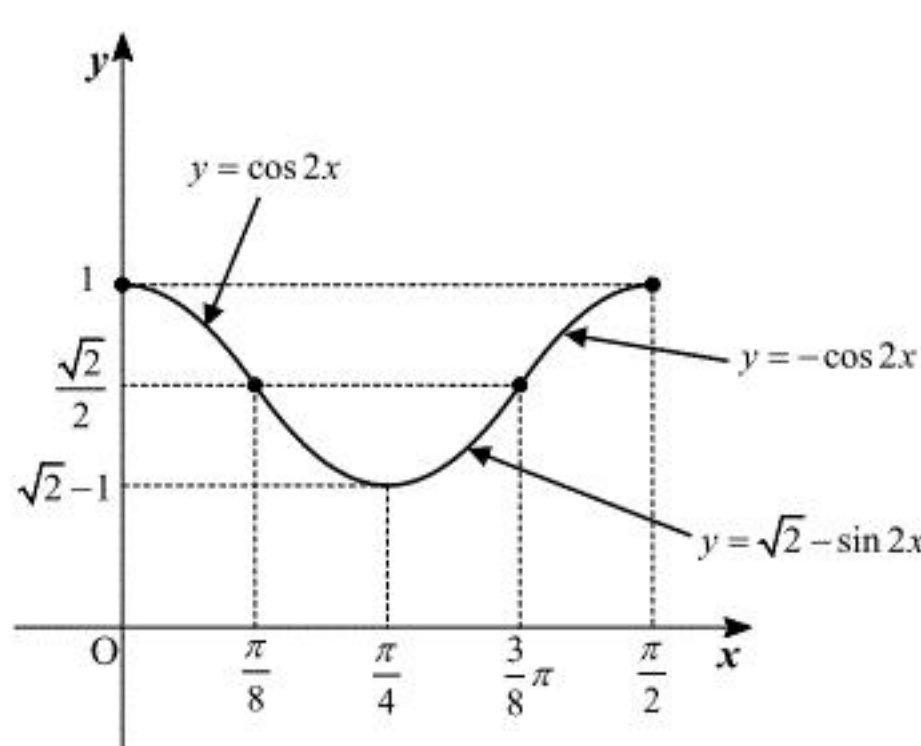
$$f(x) = \begin{cases} \cos 2x & (0 \leq x \leq \frac{\pi}{8}) \\ \sqrt{2} - \sin 2x & (\frac{\pi}{8} \leq x \leq \frac{3}{8}\pi) \\ -\cos 2x & (\frac{3}{8}\pi \leq x \leq \frac{\pi}{2}) \end{cases}$$

となる。

(答) 前表

(3)

(2)をもとに $y = f(x)$ のグラフを描くと以下のようになる。



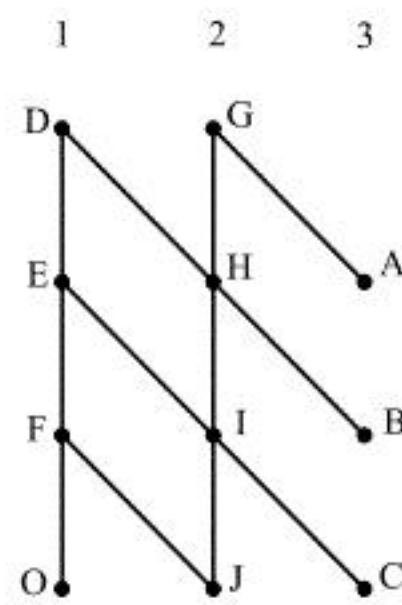
したがって、 $f(x)$ の最大値は1で、そのとき x の値は $x=0, \frac{\pi}{2}$ であり、 $f(x)$ の最小値は

$\sqrt{2}-1$ で、そのときの x の値は $x=\frac{\pi}{4}$ である。

$$(\text{答}) \quad \text{最大値: } 1 \left(x=0, \frac{\pi}{2} \right), \quad \text{最小値: } \sqrt{2}-1 \left(x=\frac{\pi}{4} \right)$$

4.

(1)



上図のように各頂点に名前を付ける。頂点 A に到達する道筋は (O)FEDH(GA), (O)FEIH(GA), (O)FJIH(GA) の 3 通りあるため、それぞれの確率を足し合わせて、

$$P_A = \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{5}{16}$$

となる。頂点 B に到達する道筋は (O)FEDH(B), (O)FEIH(B), (O)FJIH(B) の 3 通りあるため、それぞれの確率を足し合わせて、

$$P_B = \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{5}{16}$$

となる。頂点 C に到達する道筋は (O)FEI(C), (O)FJI(C) の 2 通りあるため、それぞれの確率を足し合わせて、

$$P_C = \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{8}$$

となる。

(答) $P_A = \frac{5}{16}, P_B = \frac{5}{16}, P_C = \frac{3}{8}$

(2)

C_1, C_2 をともに通過して C に到達する確率は、O から C_1 に到達し、 C_1 から C_2 に到達したあと、 C_2 から C に到達する確率に等しい。図 1 と見比べることで、これは P_C^3 に等しい。したがって、答えは $\left(\frac{3}{8}\right)^3 = \frac{27}{512}$ となる。

(答) $\frac{27}{512}$

(3)

B_1, B_2 をともに通過して B に到達する確率は、O から B_1 、 B_1 から B_2 、 B_2 から B に到達する確率に等しい。図 2 を見ると、 C_1 に到達したら、そのあと必ず B_1 を通ることに注意すると、O から B_1 に到達する確率は $P_B + P_C$ に等しいことがわかる。また、図 1 で OF は必ず通るから、O から B, C に到達する確率と、F から B, C に到達する確率は等しい。したがって、 B_1 から B_2 に到達する確率は、O から B_1 に到達する確率に等しくて $P_B + P_C$ となる。同様にして、 B_2 から B に到達する確率は P_B となる。したがって、答えは $(P_B + P_C)^2 P_B = \frac{605}{4096}$ となる。

(答) $\frac{605}{4096}$