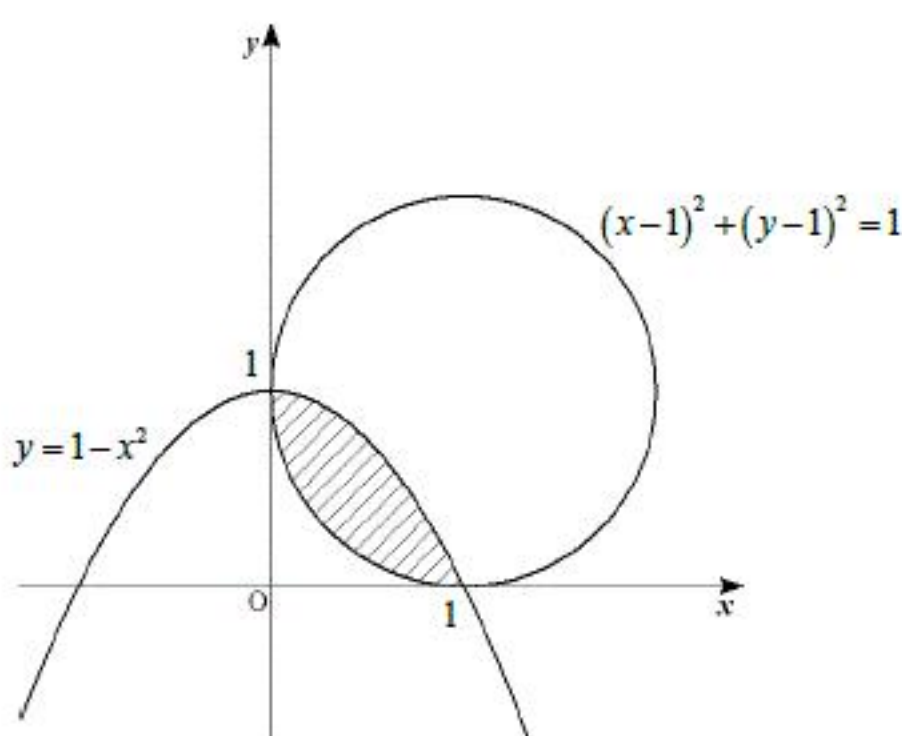


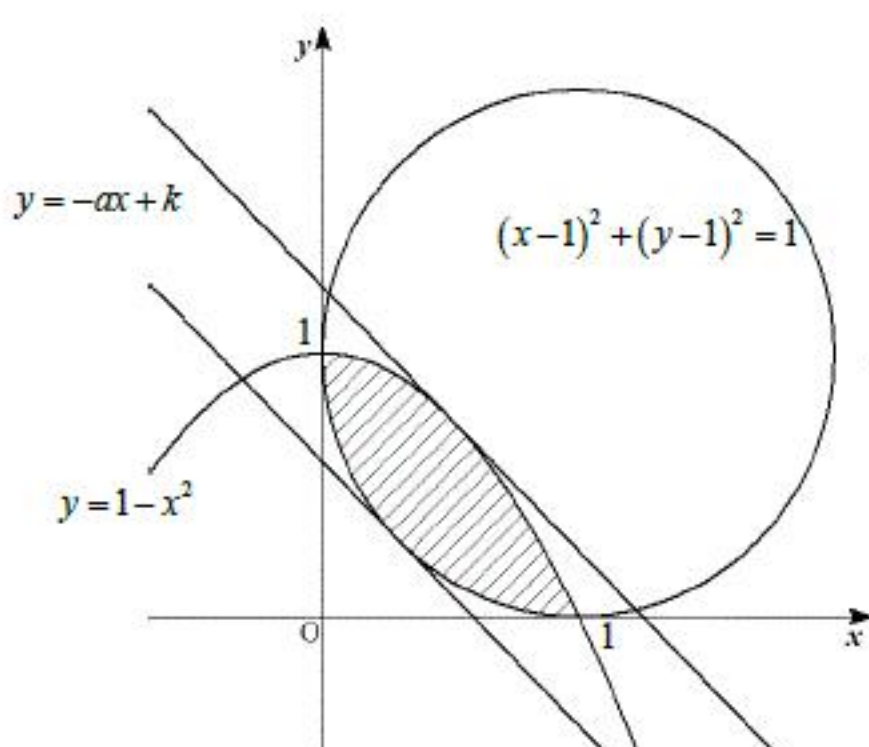
1.
(1)

領域 D を図示すると、以下のようになる。



(答) 前図

(2)



$$\begin{aligned} ax + y &= k \\ \Leftrightarrow y &= -ax + k \end{aligned}$$

とおくと、 k は直線 $y = -ax + k$ の y 切片に対応する。そのため、 $ax + y$ が最大、最小となるの

は上図のように $y = 1 - x^2$ 、 $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$ に直線 $y = -ax + k$ が接するときである。直線

$y = -ax + k$ が $y = 1 - x^2$ に接するとき、 $y' = -2x$ より接点の x 座標は

$$\begin{aligned} -2x &= -a \\ \therefore x &= \frac{a}{2} \end{aligned}$$

となり、 $0 \leq a \leq 2$ より、 $0 \leq \frac{a}{2} \leq 1$ だから、確かに上図のように接し、接点の y 座標は

$$\begin{aligned} y &= 1 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 \\ &= 1 - \frac{a^2}{4} \end{aligned}$$

となる。したがって、最大値は

$$\begin{aligned} ax + y &= a \cdot \frac{a}{2} + 1 - \frac{a^2}{4} \\ &= 1 + \frac{a^2}{4} \end{aligned}$$

である。次に、直線 $y = -ax + k$ が $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$ に接するとき、接点 (x_0, y_0) で接している

とすると、接線の方程式は $0 < x_0 < 1$ 、 $0 < y_0 < 1$ より

$$\begin{aligned} (x-1)(x_0-1) + (y-1)(y_0-1) &= 1 \\ \Leftrightarrow y &= -\frac{x_0-1}{y_0-1}x + \frac{x_0+y_0-1}{y_0-1} \end{aligned}$$

となるから、

$$\begin{aligned} -\frac{x_0-1}{y_0-1} &= -a \\ \therefore x_0-1 &= a(y_0-1) \end{aligned}$$

と求まる。接点 (x_0, y_0) は円 $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$ 上の点より

$$\begin{aligned} (x_0-1)^2 + (y_0-1)^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow (a^2+1)(y_0-1)^2 &= 1 \\ \therefore y_0 &= 1 - \frac{1}{\sqrt{a^2+1}} \quad (\because 0 < y_0 < 1) \end{aligned}$$

となる。よって、

$$\begin{aligned} x_0 &= a(y_0-1) + 1 \\ &= 1 - \frac{a}{\sqrt{a^2+1}} \end{aligned}$$

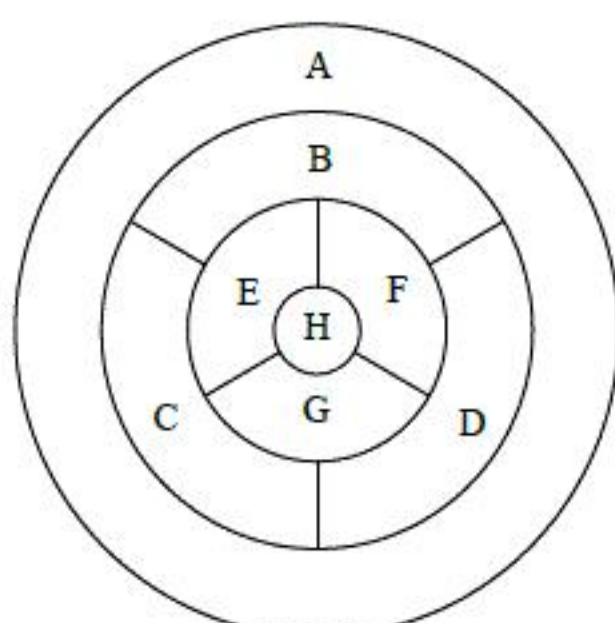
となる。したがって、

$$\begin{aligned} ax + y &= a \left(1 - \frac{a}{\sqrt{a^2+1}}\right) + 1 - \frac{1}{\sqrt{a^2+1}} \\ &= a + 1 - \sqrt{a^2+1} \end{aligned}$$

となり、最小値を取る。

$$(答) \quad M = 1 + \frac{a^2}{4}, \quad m = a + 1 - \sqrt{a^2+1}$$

2.
(1)



上のように各領域に名前を付けることにする。領域A～Hに異なる8色を振り分ける場合の数は8!である。ここで、回転することで3通りの重複があるため、塗り方は全部で

$$\frac{8!}{3}=13440$$

通りとなる。

(答) 13440通り

(2)

同じ色を2回使うため、どの領域を同じ色で塗るかで場合分けする。また、回転すると同じ位置関係となる領域の組み合わせについては同一の場合分けとして扱うものとする。

[1] AとEを同じ色にする場合

AとF, AとGを同じ色にする場合も回転すれば同じであることに注意して、AとEを同じ色にする場合を代表して考える。このとき、AとEにある色を割り振り、領域B, C, D, F, G, Hに異なる6色を振り分ける方法は、回転しても重複はないことに注意して

$$7!=5040$$

通りである。

[2] AとHを同じ色にする場合

AとHにある色を割り振り、領域B, C, D, E, F, Gに異なる6色を振り分けるやりかたは、回転すると3通り重複することに注意して

$$\frac{7!}{3}=1680$$

通りである。

[3] BとGを同じ色にする場合

CとF, DとEを同じ色にする場合も回転すれば同じであることに注意して、BとGを同じ色にする場合を代表して考える。このとき、BとGにある色を割り振り、領域A, C, D, E, F, Hに異なる6色を振り分けるやりかたは、回転しても重複はないことに注意して

$$7!=5040$$

通りである。

[4] BとHを同じ色にする場合

CとH, DとEを同じ色にする場合も回転すれば同じであることに注意して、BとHを同じ色にする場合を代表して考える。このとき、BとHにある色を割り振り、領域A, C, D, E, F, Gに異なる6色を振り分けるやりかたは、回転しても重複はないことに注意して

$$7!=5040$$

通りである。

以上[1][2][3][4]より、異なる7色を用いた塗り方は

$$5040+1680+5040+5040=16800$$

通りとなる。

(答) 16800通り

(3)

同じ色を3回使って塗り分けることはできないため、同じ色を2回使う領域が2組あることになる。以下、その組について場合分けを行う。

[1] AとEを同じ色にする場合

AとF, AとGを同じ色にする場合も回転すれば同じであることに注意して、AとEを同じ色にする場合を代表して考える。このとき、回転しても重複はないことに注意すると、もう1組の同じ色で塗る領域の組み合わせはB-G, B-H, C-F, C-H, D-Hである。同じ色で塗る領域が定まったとき、6色を振り分ける場合の数は

$$6!=720$$

通りであるから、塗り方は合計で

$$720 \times 5 = 3600$$

通りである。

[2] AとHを同じ色にする場合

もう1組の同じ色で塗る組み合わせとして考えられるのはB-G, C-F, E-Dであるが、回転すれば同じであることに注意してB-Gを代表して考える。このとき、6色を振り分ける場合の数は

$$6!=720$$

通りである。

[3] Aは他の領域と異なる色で塗り、BとGを同じ色にする場合

CとF, DとEを同じ色にする場合も回転すれば同じであることに注意して、BとGを同じ色にする場合を代表して考える。もう1組の同じ色で塗る領域の組み合わせとして考えられるのはC-F, C-H, D-E, D-Hであるが、C-FとD-Eの場合は回転すれば互いに同じ位置関係になることに注意すると、同じ色の塗り方は3通りである。このとき、6色を振り分ける場合の数は

$$6!=720$$

通りであるから、塗り方は合計で

$$720 \times 3 = 2160$$

通りである。

以上[1][2]より、異なる6色を用いた塗り方は

$$3600+720+2160=6480$$

通りとなる。

(答) 6480通り

3.
(1)

$$\begin{aligned} R_n(x) &= \frac{1}{1+x^p} - \sum_{k=0}^{n-1} (-x^p)^k \\ &= \frac{1}{1+x^p} - \frac{1-(-x^p)^n}{1-(-x^p)} \\ &= \frac{(-x^p)^n}{1+x^p} \\ &= \frac{(-1)^n x^{np}}{1+x^p} \end{aligned}$$

と変形できるから、

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 R_n(x) dx \right| &= \left| \int_0^1 \frac{(-1)^n x^{np}}{1+x^p} dx \right| \\ &= \left| (-1)^n \right| \left| \int_0^1 \frac{x^{np}}{1+x^p} dx \right| \\ &= \int_0^1 \frac{x^{np}}{1+x^p} dx \end{aligned}$$

となる。ここで、 $x > 0$ で

$$\frac{1}{1+x^p} < 1$$

であることから、 $p > 0$ より

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x^{np}}{1+x^p} dx &< \int_0^1 x^{np} dx \\ &= \left[\frac{x^{pn+1}}{pn+1} \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{pn+1} \end{aligned}$$

が成り立つ。

(証明終)

(2)

(1)で示した不等式の左辺について、

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 R_n(x) dx \right| &= \left| \int_0^1 \frac{1}{1+x^p} dx - \int_0^1 \sum_{k=0}^{n-1} (-x^p)^k dx \right| \\ &= \left| \int_0^1 \frac{1}{1+x^p} dx - \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^1 (-x^p)^k dx \right| \\ &= \left| \int_0^1 \frac{1}{1+x^p} dx - \sum_{k=0}^{n-1} \left[\frac{(-1)^k x^{pk+1}}{pk+1} \right]_0^1 \right| \\ &= \left| \int_0^1 \frac{1}{1+x^p} dx - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{pk+1} \right| \end{aligned}$$

と変形できる。したがって、(1)の不等式より

$$\left| \int_0^1 \frac{1}{1+x^p} dx - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{pk+1} \right| < \frac{1}{pn+1}$$

となる。 $n \rightarrow \infty$ の極限を考えたときに、右辺は0に収束することから、

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_0^1 \frac{1}{1+x^p} dx - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{pk+1} \right) &= 0 \\ \therefore \int_0^1 \frac{1}{1+x^p} dx &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{pk+1} \end{aligned}$$

となる。

(証明終)

(3)(a)

$$\begin{aligned} S_1 &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots \\ &= \frac{1}{1 \cdot 0 + 1} - \frac{1}{1 \cdot 1 + 1} + \frac{1}{1 \cdot 2 + 1} - \frac{1}{1 \cdot 3 + 1} + \frac{1}{1 \cdot 4 + 1} - \dots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{1 \cdot k + 1} \end{aligned}$$

より、(2)の等式で $p=1$ を代入して、

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_0^1 \frac{dx}{1+x} \\ &= \left[\log(1+x) \right]_0^1 \\ &= \log 2 \end{aligned}$$

と求まる。

(答) $S_1 = \log 2$

(b)

$$\begin{aligned} S_2 &= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots \\ &= \frac{1}{2 \cdot 0 + 1} - \frac{1}{2 \cdot 1 + 1} + \frac{1}{2 \cdot 2 + 1} - \frac{1}{2 \cdot 3 + 1} + \frac{1}{2 \cdot 4 + 1} - \dots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2 \cdot k + 1} \end{aligned}$$

より、(2)の等式で $p=2$ を代入して、

$$S_2 = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$$

となる。ここで、 $x = \tan \theta$ と置換すると、 $\frac{dx}{d\theta} = \frac{1}{\cos^2 \theta}$ であり、

x	0	$\rightarrow$	1
θ	0	$\rightarrow$	$\frac{\pi}{4}$

となる。したがって、

$$\begin{aligned} S_2 &= \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\tan^2 \theta} \cdot \frac{dx}{d\theta} \cdot d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 \theta}} \cdot \frac{d\theta}{\cos^2 \theta} \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \\ &= \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

となる。

(答) $S_2 = \frac{\pi}{4}$