

平成 27 年度・入学試験問題

数 学 (医)

注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
2. すべての解答用紙に受験番号を記入しなさい。
3. 答案は解答用紙の各問題番号の欄に記入しなさい。
4. 試験終了後、問題冊子および草稿用紙は持ち帰りなさい。

すべての問題について、求める手順をわかりやすく説明すること。

1. 点 $A\left(-1, \frac{1}{2}\right)$ および放物線 $C: y = \frac{x^2}{2}$ を考える。点 A を通る傾き m の直線を ℓ とする。ただし, m は正である。次の問いに答えよ。

(1) C と ℓ の交点の座標を m で表せ。

(2) 第 2 象限において C, ℓ および x 軸で囲まれる図形の面積 $S(m)$ を求めよ。

(3) C と ℓ で囲まれた図形の面積を $T(m)$ とする。 $\frac{T(m)}{mS(m)} = 18$ となる m に対し,

$\frac{n}{10} < m < \frac{n+1}{10}$ を満たす自然数 n を求めよ。

2. $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ で定義された関数 $f(x) = \int_x^{x+\frac{\pi}{4}} |2 \cos^2 t + 2 \sin t \cos t - 1| dt$ について, 次の問いに答えよ。

(1) $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ の値を求めよ。

(2) 積分を計算して, $f(x)$ を求めよ。

(3) $f(x)$ の最大値と最小値, およびそれらを与える x の値を求めよ。

3. 図1, 2のような網目状の道があり, 頂点 O を出発点とし, 各頂点においてそれぞれ $\frac{1}{2}$ の確率で上, または右斜め下に進む。ただし, 右斜め下に道がない場合は必ず上に, 上に道がない場合は必ず右斜め下に進み, A, B, C のいずれかに到達したら停止する。次の問いに答えよ。

- (1) 図1において, 各頂点 A, B, C に到達する確率 P_A, P_B, P_C を求めよ。
- (2) 図2において, C_1, C_2 をともに通過して C に到達する確率を求めよ。
- (3) 図2において, B に到達する確率を求めよ。

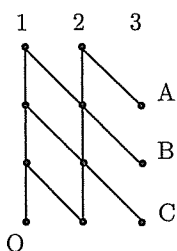


図1

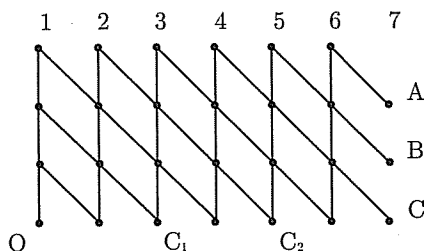


図2

4. 空間内の点 O, A_1, A_2, B, C を考える。このとき, ベクトル $\overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{OA_2}$ はともに長さが1で, 角度 θ ($0 < \theta \leq \pi/2$) をなす。また点 B は O, A_1, A_2 を含む平面 H 上に存在せず, ベクトル $\overrightarrow{OB}$ は, $\overrightarrow{OA_1} \cdot \overrightarrow{OB} = c_1, \overrightarrow{OA_2} \cdot \overrightarrow{OB} = c_2$ を満たす (ただし c_1, c_2 はいずれも0でない実数であるとする)。さらにベクトル $\overrightarrow{OC}$ は, $\overrightarrow{OC} = c_1 \overrightarrow{OA_1} + c_2 \overrightarrow{OA_2}$ のように表され, かつベクトル $\overrightarrow{CB}$ と垂直である。このとき, 次の問いに答えよ。

- (1) 角度 θ を求めよ。
- (2) $|\overrightarrow{OB}|^2 > c_1^2 + c_2^2$ が成り立つことを示せ。ただし, $|\overrightarrow{OB}|$ はベクトル $\overrightarrow{OB}$ の長さを表す。
- (3) $c_1 = c_2 = c, |\overrightarrow{OB}| = b$ とする。また, $\overrightarrow{OD_1} = c \overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{OD_2} = c \overrightarrow{OA_2}$ となるように, 空間上に点 D_1, D_2 を与える。四面体 $D_1 D_2 C B$ の体積を, b, c を用いて表しなさい。
- (4) (3) の条件の下で3点 D_1, D_2, B により定まる平面に対し, 点 C から垂線を引いたとき, 垂線と平面の交点を T とする。このとき, CT の長さを b, c で表しなさい。