

平成 27 年度・入学試験問題

数 学 (中)

注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
2. すべての解答用紙に受験番号を記入しなさい。
3. 答案は解答用紙の各問題番号の欄に記入しなさい。
4. 解答用紙の縦の線の右側には、受験番号以外は何も記入してはいけません。
5. 解答用紙の裏面には何も書いてはいけません。
6. 試験終了後、問題冊子および草稿用紙は持ち帰りなさい。

1. 連立不等式

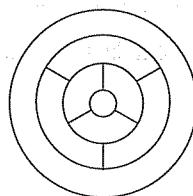
$$\begin{cases} y \leq 1 - x^2 \\ (x - 1)^2 + (y - 1)^2 \leq 1 \end{cases}$$

の表す領域を  $D$  とする。点  $P(x, y)$  が領域  $D$  内を動くとき,  $0 \leq a \leq 2$  を満たす定数  $a$  に対して  $ax + y$  の最大値を  $M$ , 最小値を  $m$  とする。次の問いに答えよ。

- (1) 領域  $D$  を図示せよ。
- (2)  $M$  および  $m$  をそれぞれ  $a$  を用いて表せ。

2. 下図に示す 8 つの領域にわかれた円を塗り分ける。そのさい各領域には 1 つの色を塗るものとし, 境界を共有する隣り合った領域には互いに異なる色を塗る。ただし, 円を  $120^\circ$  の倍数の角度で回転させて一致する塗り方はすべて同じとみなす。次の問いに答えよ。

- (1) 異なる 8 色を用いた塗り方は何通りあるか。
- (2) 異なる 7 色を用いた塗り方は何通りあるか。
- (3) 異なる 6 色を用いた塗り方は何通りあるか。



3. 自然数  $n$  に対して, 0 以上の実数を定義域とする  $x$  の関数  $R_n(x)$  を

$$R_n(x) = \frac{1}{1+x^p} - \sum_{k=0}^{n-1} (-x^p)^k$$

とする。ただし,  $p$  は正の定数である。以下の問いに答えよ。

(1) 次の不等式を示せ。

$$\left| \int_0^1 R_n(x) dx \right| < \frac{1}{pn+1}$$

(2) 次の等式を示せ。

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^p} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{pk+1}$$

(3) 以上の結果を利用して次の無限級数の和を求めよ。

(a)  $S_1 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots$

(b)  $S_2 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots$

