

平成 27 年度・入学試験問題

数 学 (後)

注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
2. すべての解答用紙に受験番号を記入しなさい。
3. 答案は解答用紙の各問題番号の欄に記入しなさい。
4. 解答用紙の裏面には何も書いてはいけません。
5. 試験終了後、問題冊子および草稿用紙は持ち帰りなさい。

1. 10 以下の互いに異なる素数 k, l, m, n と, 10 以上の互いに異なる素数 p, q に対して, $k + p + q = l^2$ が成立する。自然数 a, b, c は以下を満たす。

$$\begin{cases} a = kpg \\ b = k^2m^2 \\ c = kln^6 \\ a + b - c = 0 \end{cases}$$

次の問いに答えよ。

- (1) a が奇数であることを示せ。
- (2) b が奇数であることを示せ。
- (3) a, b を求めよ。

2. 正の実数 a に対して, 曲線 $C: y = |x^2 + ax|$ と直線 $\ell: y = -\frac{a}{2}x$ が原点 O 以外の 2 点 $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$ で交わっている。ただし条件 $x_1 \leq -1 \leq x_2$ を満たすとする。曲線 C と直線 ℓ で囲まれた領域のうち $-1 \leq x \leq 0$ にある部分の面積を S とするとき次の問いに答えよ。

- (1) 点 P, Q の座標を a で表し, 条件を満たす a の値の範囲を求めよ。
- (2) $a \leq 1$ のとき S を a で表せ。
- (3) (2) の条件のもとで S の最小値およびそのときの a の値を求めよ。

3. 正の定数 r に対して xyz 空間内の原点 O を中心とする半径 r の球面上の点を $P(s, t, u)$ とする。ただし s, t, u は正とする。直線 OP に垂直でこの球面に接する平面が x 軸, y 軸, z 軸と交わる点をそれぞれ $A(a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$, $C(0, 0, c)$ とし, 球面と x 軸, y 軸, z 軸が交わる点をそれぞれ $D(r, 0, 0)$, $E(0, r, 0)$, $F(0, 0, r)$ とする。次の問いに答えよ。

- (1) 三角形 ABC の面積 S_1 を r, s, t, u を用いて表せ。
- (2) 3 つの正の実数 l, m, n に対し不等式 $l^3 + m^3 + n^3 \geq 3lmn$ を証明せよ。また, 等号が成立するのは $l = m = n$ のときに限ることを示せ。
- (3) 点 P が与えられた球面を動くとき, S_1 の最小値を r で表せ。ただし, (2) の不等式を用いてよい。
- (4) 三角形 DEF の面積を S_2 とする。(3) で求めた S_1 の最小値と S_2 の比を求めよ。

4. n 枚のトランプカードがあり, そのうち k 枚は絵札, 残りの $n - k$ 枚は数字のカードである。これら n 枚のカードを裏向きに並べ, 次の操作 1, 操作 2 を順に行った後に, k 枚の絵札すべてが表を向いていれば「勝ち」とする。

操作 1: n 枚のそれぞれのカードすべてについて 1 個のサイコロを 1 回ずつ振り, 偶数の目が出たらそのカードを表に向ける。

操作 2: 表を向いていないカードがあれば, その中から無作為に 1 枚を選び, 表に向ける。
ただし, 操作 1 の終了後カードがすべて表を向いていれば, なにも行わない。

次の問いに答えよ。

- (1) $n = 2, k = 1$ のとき, 「勝ち」となる確率を求めよ。
- (2) $n = 5, k = 1$ のとき, 「勝ち」となる確率を求めよ。
- (3) $n = 5, k = 2$ のとき, 「勝ち」となる確率を求めよ。

