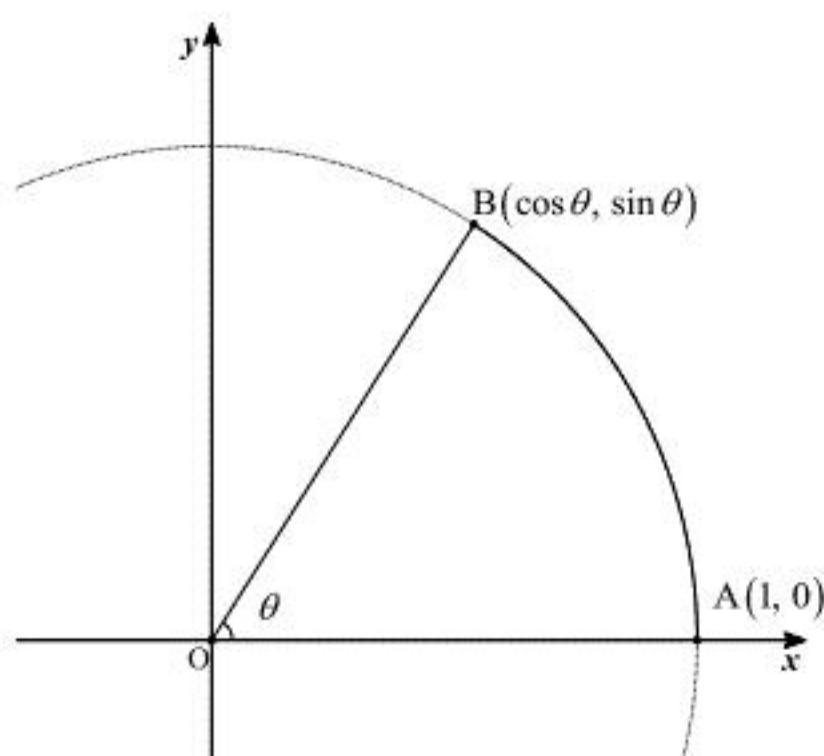


1.

(1)

点  $B$  の座標は  $(\cos \theta, \sin \theta)$  として一般性を失わない。このとき扇形  $OAB$  は下図のようになる。



よって求める体積は

$$\begin{aligned} V_1(\theta) &= \frac{1}{3} \pi \sin^2 \theta \cdot \cos \theta + \pi \int_{\cos \theta}^1 y^2 dx \\ &= \frac{1}{3} \pi \sin^2 \theta \cos \theta + \pi \int_{\cos \theta}^1 (1 - x^2) dx \quad (\because x^2 + y^2 = 1) \\ &= \frac{1}{3} \pi \sin^2 \theta \cos \theta + \pi \left[ x - \frac{1}{3} x^3 \right]_{\cos \theta}^1 \\ &= \frac{1}{3} \pi (1 - \cos^2 \theta) \cos \theta + \pi \left( \frac{2}{3} - \cos \theta + \frac{1}{3} \cos^3 \theta \right) \\ &= \frac{2}{3} \pi (1 - \cos \theta) \end{aligned}$$

となる。

(答)  $V_1(\theta) = \frac{2}{3} \pi (1 - \cos \theta)$

(2)

(1)の図より

$$\begin{aligned} V_2(\theta) &= \pi \int_0^{\sin \theta} x^2 dy - \frac{1}{3} \pi \cos^2 \theta \sin \theta \\ &= \pi \int_0^{\sin \theta} (1 - y^2) dy - \frac{1}{3} \pi \cos^2 \theta \sin \theta \quad (\because x^2 + y^2 = 1) \\ &= \pi \left[ y - \frac{1}{3} y^3 \right]_0^{\sin \theta} - \frac{1}{3} \pi \cos^2 \theta \sin \theta \\ &= \pi \left( \sin \theta - \frac{1}{3} \sin^3 \theta \right) - \frac{1}{3} \pi (1 - \sin^2 \theta) \sin \theta \\ &= \frac{2}{3} \pi \sin \theta \end{aligned}$$

となる。

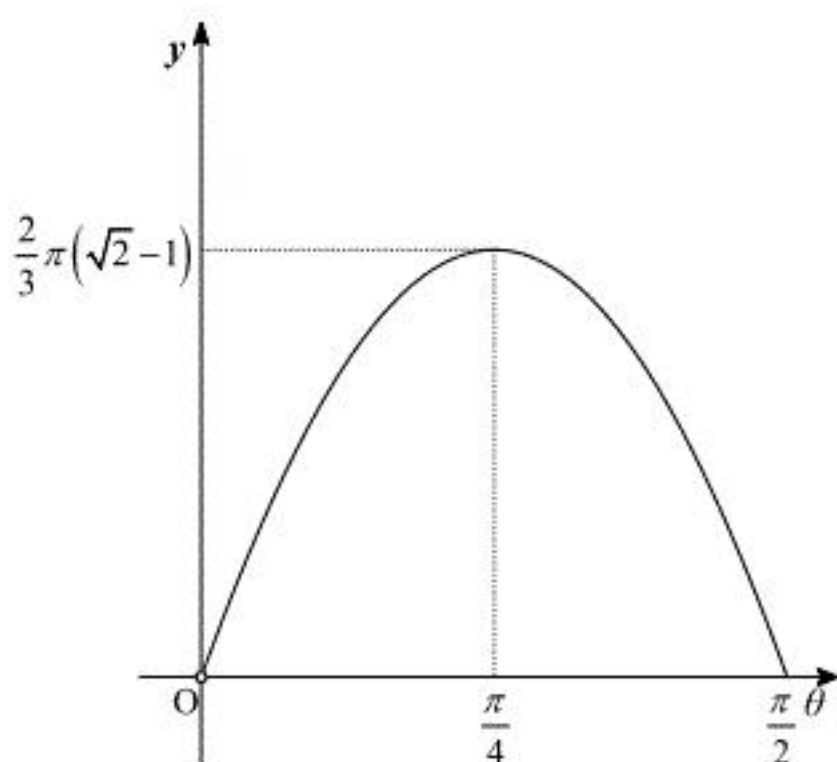
(答)  $V_2(\theta) = \frac{2}{3} \pi \sin \theta$

(3)

(1)と(2)の結果より

$$\begin{aligned} V(\theta) &= V_2(\theta) - V_1(\theta) \\ &= \frac{2}{3} \pi \sin \theta - \frac{2}{3} \pi (1 - \cos \theta) \\ &= \frac{2}{3} \pi (\sin \theta + \cos \theta - 1) \\ &= \frac{2}{3} \pi \left\{ \sqrt{2} \sin \left( \theta + \frac{\pi}{4} \right) - 1 \right\} \end{aligned}$$

となる。よって  $0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}$  における  $y = V(\theta)$  のグラフは以下のようになる。



(答) 前図

## 2.

(1)

四角形の左上の頂点の選び方は4通りあり、右下の頂点の選び方は7通りある。これらを1つずつ選べば点Aを頂点とする四角形ができるから、求める個数は、

$$4 \times 7 = 28 \text{ (個)}$$

となる。

(答) 28 個

(2)

図2の中にある四角形の数は、図1の中にある四角形の数から、点Aを頂点とする四角形の数を引いた数である。ここで図1の中にある四角形の数は、横線5本と縦線8本から異なる線を2本ずつ選ぶ場合の数に等しいから

$${}_5C_2 \cdot {}_8C_2 = 280 \text{ (個)}$$

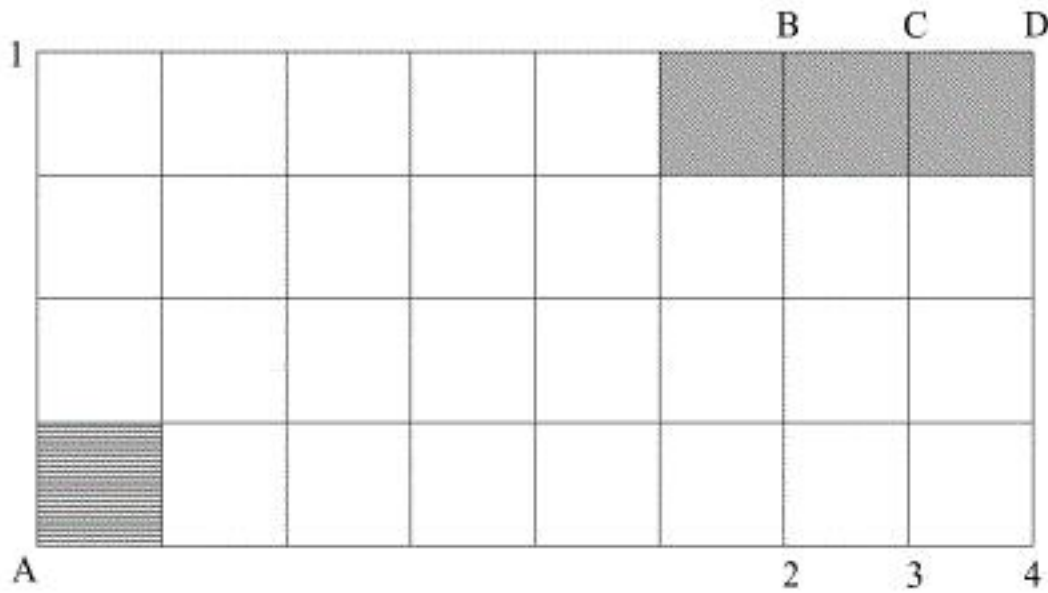
となる。よって求める個数は

$$280 - 28 = 252 \text{ (個)}$$

となる。

(答) 252 個

(3)



点Aを頂点とする四角形の集合を $X$ 、点B, C, Dのうち少なくとも1つを頂点とする四角形の集合を $Y$ とすると、求める数は、

$$280 - n(X \cup Y) = 280 - \{n(X) + n(Y) - n(X \cap Y)\}$$

と表される。 $n(Y)$ は、図の1の横線を選び、2, 3, 4の縦線のうち少なくとも1つを選ぶような場合の数に等しいから

$$n(Y) = 1 \cdot 4 \cdot ({}_8C_2 - {}_5C_2) = 4 \cdot 18 = 72$$

である。また、集合 $X \cap Y$ に含まれる四角形は、右上の頂点を点B, C, Dのうちから1つ選ぶことで定まるから、

$$n(X \cap Y) = 3$$

である。したがって求める数は、

$$280 - (28 + 72 - 3) = 183 \text{ (個)}$$

となる。

(答) 183 個

3.

(1)

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) - (a_1 b_1)^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{a_1^2 b_1^2 + a_1^2 b_2^2 + a_2^2 b_2^2} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad S = \frac{1}{2} \sqrt{a_1^2 b_1^2 + a_1^2 b_2^2 + a_2^2 b_2^2}$$

(2)

$P(x, y, z)$  とおく。  $\overrightarrow{OP}$  の大きさが1であるから

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \quad \dots \textcircled{1}$$

である。また、  $\overrightarrow{OP}$  は平面 OAB と垂直であるから、  $\overrightarrow{OP} \perp \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{OP} \perp \vec{b}$  より、

$$\overrightarrow{OP} \cdot \vec{a} = 0$$

$$\Leftrightarrow a_1 x + a_2 y = 0$$

$$\overrightarrow{OP} \cdot \vec{b} = 0$$

$$\Leftrightarrow b_1 y + b_2 z = 0$$

となる。  $a_1, b_2 > 0$  に気を付けると、

$$\begin{cases} x = -\frac{a_2}{a_1} y & \dots \textcircled{2} \\ z = -\frac{b_1}{b_2} y & \dots \textcircled{3} \end{cases}$$

となるから、これを①式に代入して、

$$\begin{aligned} \left(-\frac{a_2}{a_1} y\right)^2 + y^2 + \left(-\frac{b_1}{b_2} y\right)^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow \frac{a_2^2 b_2^2 + a_1^2 b_2^2 + a_1^2 b_1^2}{a_1^2 b_2^2} y^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow y &= \pm \frac{a_1 b_2}{\sqrt{a_1^2 b_1^2 + a_1^2 b_2^2 + a_2^2 b_2^2}} \end{aligned}$$

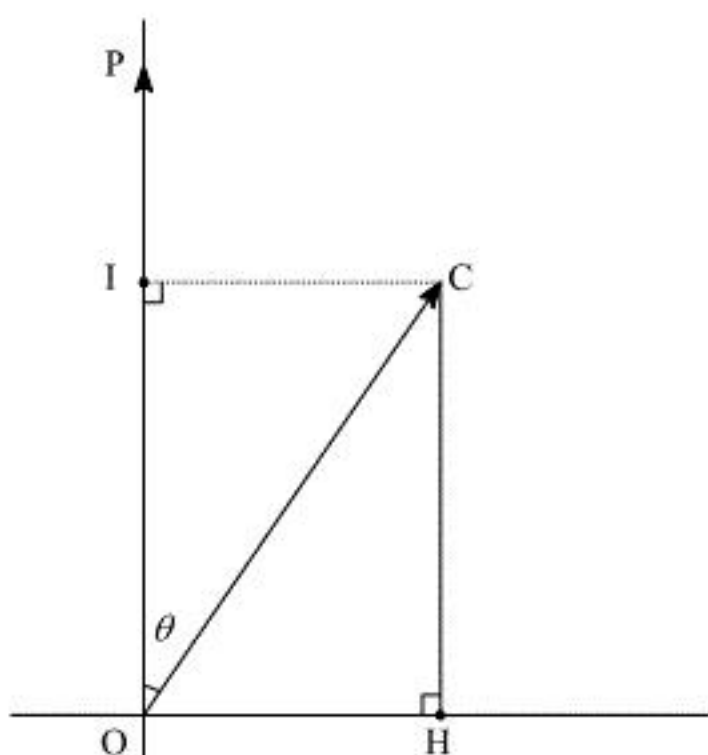
となる。よって②、③より点 P の座標は

$$\left( \mp \frac{a_2 b_2}{\sqrt{a_1^2 b_1^2 + a_1^2 b_2^2 + a_2^2 b_2^2}}, \pm \frac{a_1 b_2}{\sqrt{a_1^2 b_1^2 + a_1^2 b_2^2 + a_2^2 b_2^2}}, \mp \frac{a_1 b_1}{\sqrt{a_1^2 b_1^2 + a_1^2 b_2^2 + a_2^2 b_2^2}} \right) \text{ (複号同順)}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad P \left( \mp \frac{a_2 b_2}{\sqrt{a_1^2 b_1^2 + a_1^2 b_2^2 + a_2^2 b_2^2}}, \pm \frac{a_1 b_2}{\sqrt{a_1^2 b_1^2 + a_1^2 b_2^2 + a_2^2 b_2^2}}, \mp \frac{a_1 b_1}{\sqrt{a_1^2 b_1^2 + a_1^2 b_2^2 + a_2^2 b_2^2}} \right) \text{ (複号同順)}$$

(3)



点 C から平面 OAB、直線 OP に下した垂線の足をそれぞれ H, I、  $\overrightarrow{OC}$  と  $\overrightarrow{OP}$  のなす角を  $\theta$  とすると、

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{CH}| &= |\overrightarrow{OI}| \\ &= |\overrightarrow{OC}| \cos \theta \\ &= |\overrightarrow{OC}| \cdot \frac{|\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OP}|}{|\overrightarrow{OC}| |\overrightarrow{OP}|} \\ &= |\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OP}| \quad (\because |\overrightarrow{OP}| = 1) \end{aligned}$$

である。

$$|\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OP}| = \frac{a_1 b_1 c_2 + a_2 b_2 c_1}{\sqrt{a_1^2 b_1^2 + a_1^2 b_2^2 + a_2^2 b_2^2}}$$

であるから、求める体積は

$$V = \frac{1}{3} \cdot S \cdot CH = \frac{a_1 b_1 c_2 + a_2 b_2 c_1}{6}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad V = \frac{a_1 b_1 c_2 + a_2 b_2 c_1}{6}$$

4.

(1)

与式より

$$\begin{aligned}\int_0^{k+1} f_{k+1}(x) dx &= \int_0^k f_k(x) dx - k^2 - k \\ \Leftrightarrow \left[ -x^3 - x^2 + a_{k+1}x \right]_0^{k+1} &= \left[ -x^3 - x^2 + a_k x \right]_0^k - k^2 - k \\ \Leftrightarrow -(k+1)^3 - (k+1)^2 + (k+1)a_{k+1} &= -k^3 - k^2 + ka_k - k^2 - k \\ \Leftrightarrow (k+1)a_{k+1} &= ka_k + 2(k+1)^2\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad (k+1)a_{k+1} = ka_k + 2(k+1)^2$$

(2)

$b_k = ka_k$  とおくと (1) より

$$\begin{aligned}b_{k+1} &= b_k + 2(k+1)^2 \\ \Leftrightarrow b_{k+1} - b_k &= 2(k+1)^2\end{aligned}$$

となるから、 $k \geq 2$  のとき、

$$\begin{aligned}b_k &= b_1 + \sum_{l=1}^{k-1} (b_{l+1} - b_l) \\ &= 1 \cdot a_1 + \sum_{l=1}^{k-1} 2(l+1)^2 \\ &= 2 + 2 \sum_{l=2}^k l^2 \\ &= 2 + 2 \left\{ \frac{1}{6} k(k+1)(2k+1) - 1 \right\} \\ &= \frac{1}{3} k(k+1)(2k+1)\end{aligned}$$

となる。したがって、

$$\begin{aligned}ka_k &= \frac{1}{3} k(k+1)(2k+1) \\ \Leftrightarrow a_k &= \frac{1}{3} (k+1)(2k+1)\end{aligned}$$

であり、これは  $k=1$  のときも成り立つ。

$$(\text{答}) \quad a_k = \frac{1}{3} (k+1)(2k+1)$$

(3)

$$\begin{aligned}\int_0^k f_k(x) dx &= ka_k - k^3 - k^2 \\ &= \frac{1}{3} k(k+1)(2k+1) - k^3 - k^2 \\ &= -\frac{1}{3} (k^3 - k)\end{aligned}$$

となるから

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n \int_0^k f_k(x) dx &= -\frac{1}{3} \sum_{k=1}^n (k^3 - k) \\ &= -\frac{1}{3} \left[ \left\{ \frac{1}{2} n(n+1) \right\}^2 - \frac{1}{2} n(n+1) \right] \\ &= -\frac{1}{6} n(n+1) \left\{ \frac{1}{2} n(n+1) - 1 \right\} \\ &= -\frac{1}{12} n(n+1)(n^2 + n - 2) \\ &= -\frac{1}{12} n(n-1)(n+1)(n+2)\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \sum_{k=1}^n \int_0^k f_k(x) dx = -\frac{1}{12} n(n-1)(n+1)(n+2)$$