

1.

(1)

$$f'(x) = 4x^3 - 4x + 1$$

であるから、 $x=t$ における $y=f(x)$ の接線の方程式は

$$\begin{aligned} y &= f'(t)(x-t) + f(t) \\ &= (4t^3 - 4t + 1)(x-t) + t^4 - 2t^2 + t \\ &= (4t^3 - 4t + 1)x - 3t^4 + 2t^2 \end{aligned}$$

となる。これが $y=f(x)$ と2点で接するとき、2式から y を消去した方程式

$$x^4 - 2x^2 + x = (4t^3 - 4t + 1)x - 3t^4 + 2t^2$$

が2つの異なる重解を持つ。重解の1つは $x=t$ であるから、これをもとに上式を整理すると

$$x^4 - 2x^2 + x = (4t^3 - 4t + 1)x - 3t^4 + 2t^2$$

$$\Leftrightarrow (x-t)^2(x^2 + 2tx + 3t^2 - 2) = 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

となる。よって $x^2 + 2tx + 3t^2 - 2 = 0$ が重解を持つことが必要であるので、判別式を D とすると、

$$\begin{aligned} D &= 0 \\ \Leftrightarrow t^2 - (3t^2 - 2) &= 0 \\ \Leftrightarrow t &= \pm 1 \end{aligned}$$

となる。いずれの場合も①式は

$$(x-1)^2(x+1)^2 = 0$$

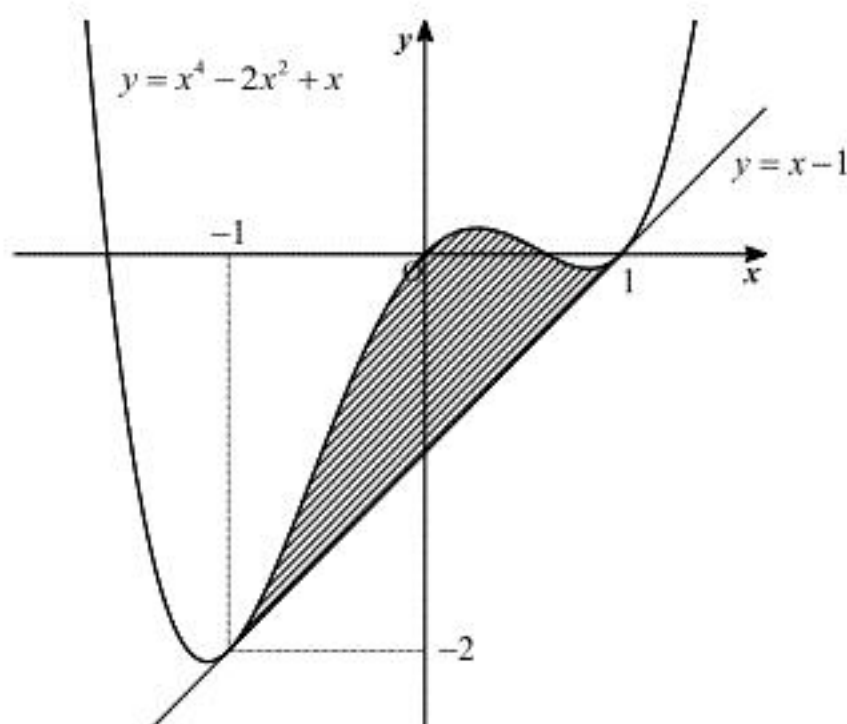
となるから、直線と曲線 $y=f(x)$ は2点で接する。このときの直線の方程式は

$$y = x - 1$$

である。

(答) $y = x - 1$

(2)



上図斜線部の面積を求めればよいから

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \{x^4 - 2x^2 + x - (x-1)\} dx &= \int_{-1}^1 (x^4 - 2x^2 + 1) dx \\ &= 2 \int_0^1 (x^4 - 2x^2 + 1) dx \\ &= 2 \left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{2}{3}x^3 + x \right]_0^1 \\ &= 2 \left(\frac{1}{5} - \frac{2}{3} + 1 \right) \\ &= \frac{16}{15} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{16}{15}$

2.

(1)

四角形の左上の頂点の選び方は4通りあり、右下の頂点の選び方は7通りある。これらを1つずつ選べば点Aを頂点とする四角形ができるから、求める個数は、

$$4 \times 7 = 28 \text{ (個)}$$

となる。

(答) 28 個

(2)

図2の中にある四角形の数は、図1の中にある四角形の数から、点Aを頂点とする四角形の数を引いた数である。ここで図1の中にある四角形の数は、横線5本と縦線8本から異なる線を2本ずつ選ぶ場合の数に等しいから

$${}_5C_2 \cdot {}_8C_2 = 280 \text{ (個)}$$

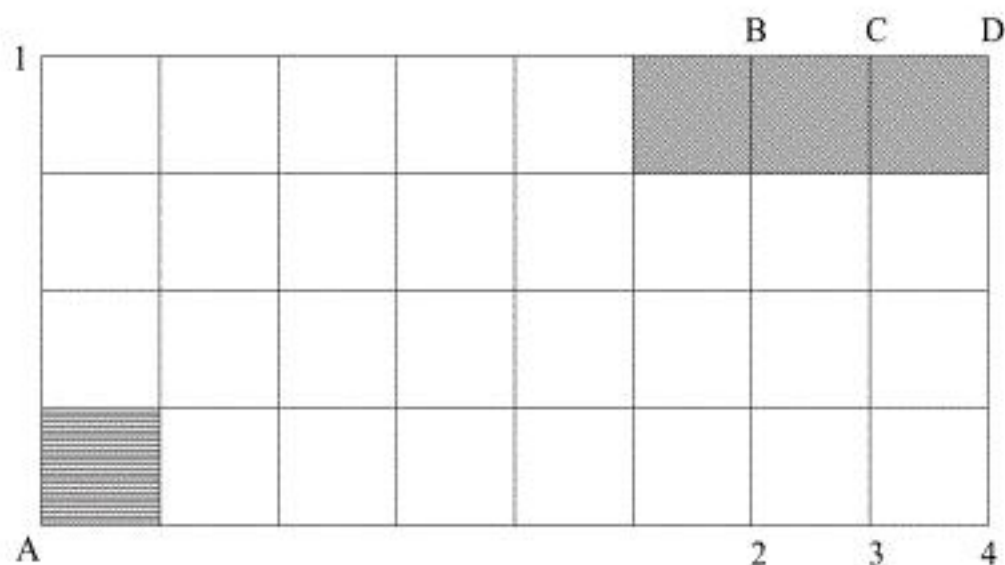
となる。よって求める個数は

$$280 - 28 = 252 \text{ (個)}$$

となる。

(答) 252 個

(3)



点Aを頂点とする四角形の集合を X 、点B, C, Dのうち少なくとも1つを頂点とする四角形の集合を Y とすると、求める数は、

$$280 - n(X \cup Y) = 280 - \{n(X) + n(Y) - n(X \cap Y)\}$$

と表される。 $n(Y)$ は、図の1の横線を選び、2, 3, 4の縦線のうち少なくとも1つを選ぶような場合の数に等しいから

$$n(Y) = 1 \cdot 4 \cdot ({}_8C_2 - {}_5C_2) = 4 \cdot 18 = 72$$

である。また、集合 $X \cap Y$ に含まれる四角形は、右上の頂点を点B, C, Dのうちから1つ選ぶことで定まるから、

$$n(X \cap Y) = 3$$

である。したがって求める数は、

$$280 - (28 + 72 - 3) = 183 \text{ (個)}$$

となる。

(答) 183 個

3.

(1)

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) - (a_1 b_1)^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{a_1^2 b_1^2 + a_1^2 b_2^2 + a_2^2 b_2^2} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad S = \frac{1}{2} \sqrt{a_1^2 b_1^2 + a_1^2 b_2^2 + a_2^2 b_2^2}$$

(2)

$P(x, y, z)$ とおく。 $\overline{OP}$ の大きさが 1 であるから

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \quad \dots \textcircled{1}$$

である。また、 $\overline{OP}$ は平面 OAB と垂直であるから、 $\overline{OP} \perp \vec{a}, \overline{OP} \perp \vec{b}$ より、

$$\begin{aligned} \overline{OP} \cdot \vec{a} &= 0 \\ \Leftrightarrow a_1 x + a_2 y &= 0 \\ \overline{OP} \cdot \vec{b} &= 0 \\ \Leftrightarrow b_1 y + b_2 z &= 0 \end{aligned}$$

となる。 $a_1, b_2 > 0$ に気を付けると、

$$\begin{cases} x = -\frac{a_2}{a_1} y & \dots \textcircled{2} \\ z = -\frac{b_1}{b_2} y & \dots \textcircled{3} \end{cases}$$

となるから、これを①式に代入して、

$$\begin{aligned} \left(-\frac{a_2}{a_1} y\right)^2 + y^2 + \left(-\frac{b_1}{b_2} y\right)^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow \frac{a_2^2 b_2^2 + a_1^2 b_2^2 + a_1^2 b_1^2}{a_1^2 b_2^2} y^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow y &= \pm \frac{a_1 b_2}{\sqrt{a_1^2 b_1^2 + a_1^2 b_2^2 + a_2^2 b_2^2}} \end{aligned}$$

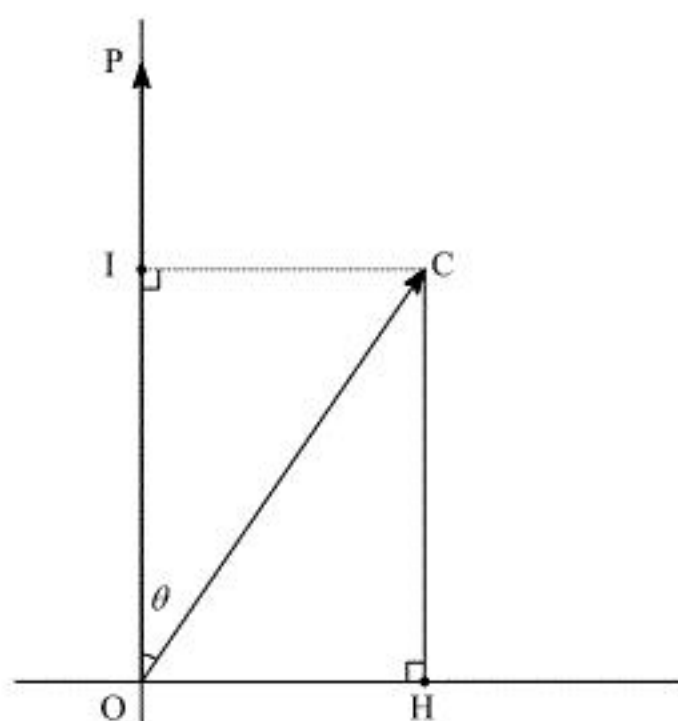
となる。よって②、③より点 P の座標は

$$\left(\mp \frac{a_2 b_2}{\sqrt{a_1^2 b_1^2 + a_1^2 b_2^2 + a_2^2 b_2^2}}, \pm \frac{a_1 b_2}{\sqrt{a_1^2 b_1^2 + a_1^2 b_2^2 + a_2^2 b_2^2}}, \mp \frac{a_1 b_1}{\sqrt{a_1^2 b_1^2 + a_1^2 b_2^2 + a_2^2 b_2^2}} \right) \text{ (複号同順)}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad P \left(\mp \frac{a_2 b_2}{\sqrt{a_1^2 b_1^2 + a_1^2 b_2^2 + a_2^2 b_2^2}}, \pm \frac{a_1 b_2}{\sqrt{a_1^2 b_1^2 + a_1^2 b_2^2 + a_2^2 b_2^2}}, \mp \frac{a_1 b_1}{\sqrt{a_1^2 b_1^2 + a_1^2 b_2^2 + a_2^2 b_2^2}} \right) \text{ (複号同順)}$$

(3)



点 C から平面 OAB、直線 OP に下した垂線の足をそれぞれ H, I、 $\overline{OC}$ と $\overline{OP}$ のなす角を θ とすると、

$$\begin{aligned} |\overline{CH}| &= |\overline{OI}| \\ &= |\overline{OC}| |\cos \theta| \\ &= |\overline{OC}| \cdot \frac{|\overline{OC} \cdot \overline{OP}|}{|\overline{OC}| |\overline{OP}|} \\ &= |\overline{OC} \cdot \overline{OP}| \quad (\because |\overline{OP}| = 1) \end{aligned}$$

である。

$$|\overline{OC} \cdot \overline{OP}| = \frac{a_1 b_1 c_2 + a_2 b_2 c_1}{\sqrt{a_1^2 b_1^2 + a_1^2 b_2^2 + a_2^2 b_2^2}}$$

であるから、求める体積は

$$V = \frac{1}{3} \cdot S \cdot CH = \frac{a_1 b_1 c_2 + a_2 b_2 c_1}{6}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad V = \frac{a_1 b_1 c_2 + a_2 b_2 c_1}{6}$$

4.

(1)

与式より

$$\begin{aligned}\int_0^{k+1} f_{k+1}(x) dx &= \int_0^k f_k(x) dx - k^2 - k \\ \Leftrightarrow \left[-x^3 - x^2 + a_{k+1}x \right]_0^{k+1} &= \left[-x^3 - x^2 + a_k x \right]_0^k - k^2 - k \\ \Leftrightarrow -(k+1)^3 - (k+1)^2 + (k+1)a_{k+1} &= -k^3 - k^2 + ka_k - k^2 - k \\ \Leftrightarrow (k+1)a_{k+1} &= ka_k + 2(k+1)^2\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad (k+1)a_{k+1} = ka_k + 2(k+1)^2$$

(2)

$b_k = ka_k$ とおくと(1)より

$$\begin{aligned}b_{k+1} &= b_k + 2(k+1)^2 \\ \Leftrightarrow b_{k+1} - b_k &= 2(k+1)^2\end{aligned}$$

となるから、 $k \geq 2$ のとき、

$$\begin{aligned}b_k &= b_1 + \sum_{l=1}^{k-1} (b_{l+1} - b_l) \\ &= 1 \cdot a_1 + \sum_{l=1}^{k-1} 2(l+1)^2 \\ &= 2 + 2 \sum_{l=2}^k l^2 \\ &= 2 + 2 \left\{ \frac{1}{6} k(k+1)(2k+1) - 1 \right\} \\ &= \frac{1}{3} k(k+1)(2k+1)\end{aligned}$$

となる。したがって、

$$\begin{aligned}ka_k &= \frac{1}{3} k(k+1)(2k+1) \\ \Leftrightarrow a_k &= \frac{1}{3} (k+1)(2k+1)\end{aligned}$$

であり、これは $k=1$ のときも成り立つ。

$$(\text{答}) \quad a_k = \frac{1}{3} (k+1)(2k+1)$$

(3)

$$\begin{aligned}\int_0^k f_k(x) dx &= ka_k - k^3 - k^2 \\ &= \frac{1}{3} k(k+1)(2k+1) - k^3 - k^2 \\ &= -\frac{1}{3} (k^3 - k)\end{aligned}$$

となるから

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n \int_0^k f_k(x) dx &= -\frac{1}{3} \sum_{k=1}^n (k^3 - k) \\ &= -\frac{1}{3} \left[\left\{ \frac{1}{2} n(n+1) \right\}^2 - \frac{1}{2} n(n+1) \right] \\ &= -\frac{1}{6} n(n+1) \left\{ \frac{1}{2} n(n+1) - 1 \right\} \\ &= -\frac{1}{12} n(n+1)(n^2 + n - 2) \\ &= -\frac{1}{12} n(n-1)(n+1)(n+2)\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \sum_{k=1}^n \int_0^k f_k(x) dx = -\frac{1}{12} n(n-1)(n+1)(n+2)$$