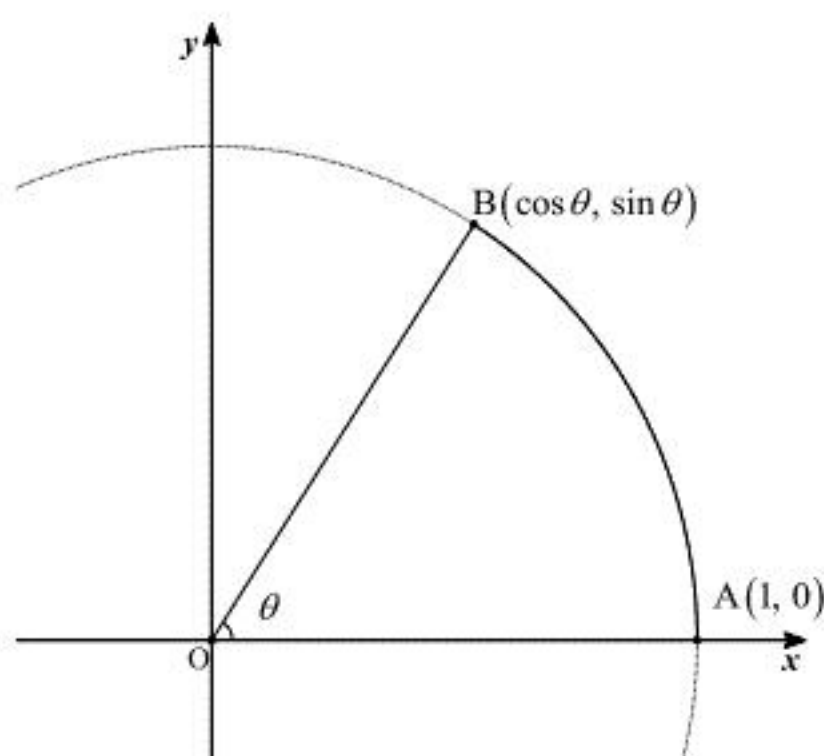


1.

(1)

点 B の座標は $(\cos \theta, \sin \theta)$ として一般性を失わない。このとき扇形 OAB は下図のようになる。



よって求める体積は

$$\begin{aligned} V_1(\theta) &= \frac{1}{3} \pi \sin^2 \theta \cdot \cos \theta + \pi \int_{\cos \theta}^1 y^2 dx \\ &= \frac{1}{3} \pi \sin^2 \theta \cos \theta + \pi \int_{\cos \theta}^1 (1 - x^2) dx \quad (\because x^2 + y^2 = 1) \\ &= \frac{1}{3} \pi \sin^2 \theta \cos \theta + \pi \left[x - \frac{1}{3} x^3 \right]_{\cos \theta}^1 \\ &= \frac{1}{3} \pi (1 - \cos^2 \theta) \cos \theta + \pi \left(\frac{2}{3} - \cos \theta + \frac{1}{3} \cos^3 \theta \right) \\ &= \frac{2}{3} \pi (1 - \cos \theta) \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad V_1(\theta) = \frac{2}{3} \pi (1 - \cos \theta)$$

(2)

(1)の図より

$$\begin{aligned} V_2(\theta) &= \pi \int_0^{\sin \theta} x^2 dy - \frac{1}{3} \pi \cos^2 \theta \sin \theta \\ &= \pi \int_0^{\sin \theta} (1 - y^2) dy - \frac{1}{3} \pi \cos^2 \theta \sin \theta \quad (\because x^2 + y^2 = 1) \\ &= \pi \left[y - \frac{1}{3} y^3 \right]_0^{\sin \theta} - \frac{1}{3} \pi \cos^2 \theta \sin \theta \\ &= \pi \left(\sin \theta - \frac{1}{3} \sin^3 \theta \right) - \frac{1}{3} \pi (1 - \sin^2 \theta) \sin \theta \\ &= \frac{2}{3} \pi \sin \theta \end{aligned}$$

となる。

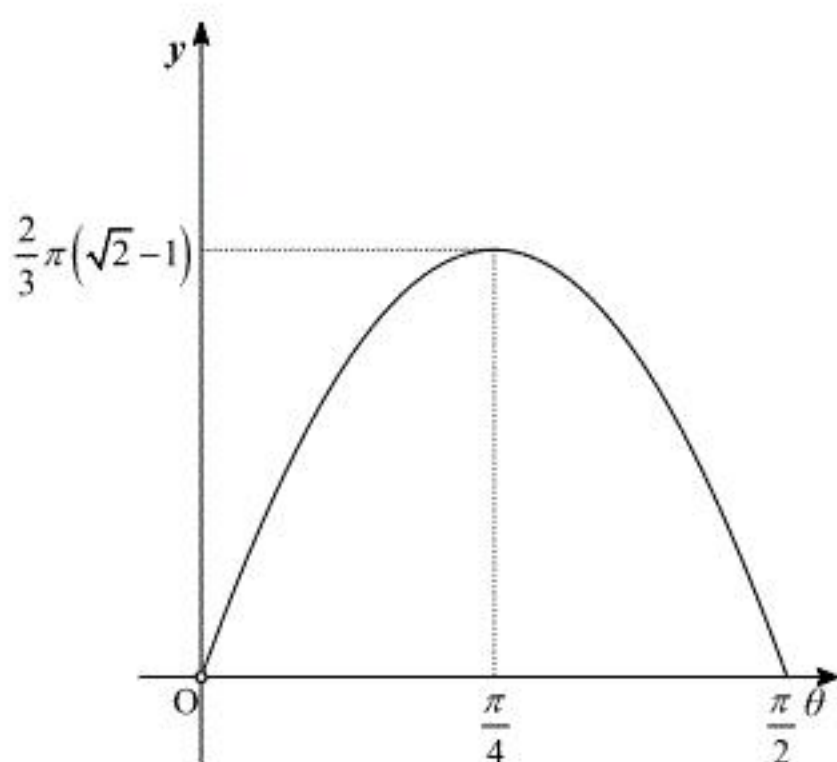
$$(\text{答}) \quad V_2(\theta) = \frac{2}{3} \pi \sin \theta$$

(3)

(1)と(2)の結果より

$$\begin{aligned} V(\theta) &= V_2(\theta) - V_1(\theta) \\ &= \frac{2}{3} \pi \sin \theta - \frac{2}{3} \pi (1 - \cos \theta) \\ &= \frac{2}{3} \pi (\sin \theta + \cos \theta - 1) \\ &= \frac{2}{3} \pi \left\{ \sqrt{2} \sin \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right) - 1 \right\} \end{aligned}$$

となる。よって $0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}$ における $y = V(\theta)$ のグラフは以下のようになる。



(答) 前図

2.

(1)

四角形の左上の頂点の選び方は4通りあり、右下の頂点の選び方は7通りある。これらを1つずつ選べば点Aを頂点とする四角形ができるから、求める個数は、

$$4 \times 7 = 28 \text{ (個)}$$

となる。

(答) 28 個

(2)

図2の中にある四角形の数、図1の中にある四角形の数から、点Aを頂点とする四角形の数、を引いた数である。ここで図1の中にある四角形の数、は、横線5本と縦線8本から異なる線を2本ずつ選ぶ場合の数に等しいから

$${}_5C_2 \cdot {}_8C_2 = 280 \text{ (個)}$$

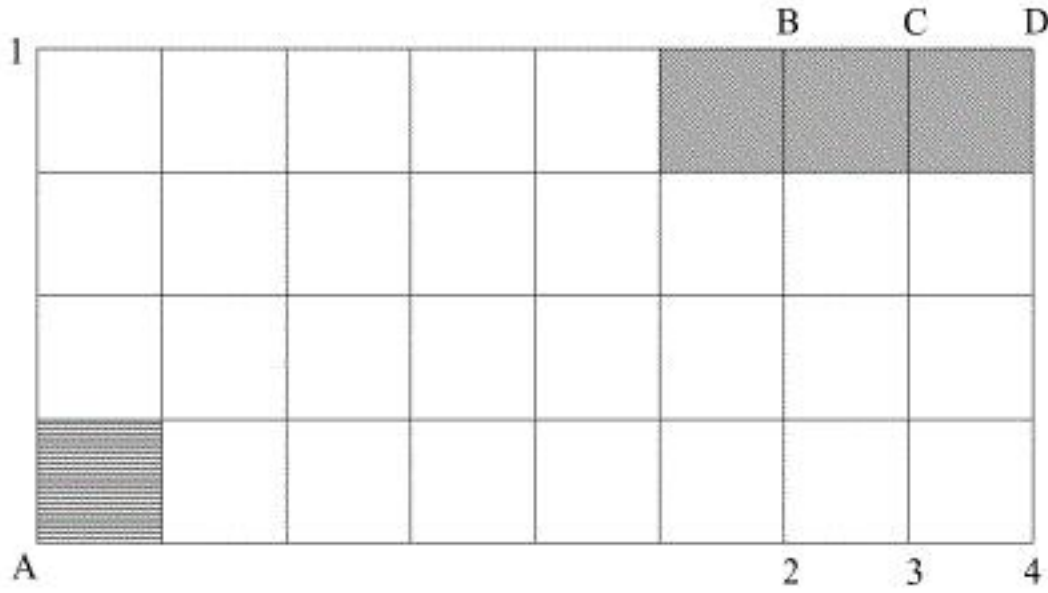
となる。よって求める個数は

$$280 - 28 = 252 \text{ (個)}$$

となる。

(答) 252 個

(3)



点Aを頂点とする四角形の集合を X 、点B, C, Dのうち少なくとも1つを頂点とする四角形の集合を Y とすると、求める数は、

$$280 - n(X \cup Y) = 280 - \{n(X) + n(Y) - n(X \cap Y)\}$$

と表される。 $n(Y)$ は、図の1の横線を選び、2, 3, 4の縦線のうち少なくとも1つを選ぶような場合の数に等しいから

$$n(Y) = 1 \cdot 4 \cdot ({}_8C_2 - {}_5C_2) = 4 \cdot 18 = 72$$

である。また、集合 $X \cap Y$ に含まれる四角形は、右上の頂点を点B, C, Dのうちから1つ選ぶことで定まるから、

$$n(X \cap Y) = 3$$

である。したがって求める数は、

$$280 - (28 + 72 - 3) = 183 \text{ (個)}$$

となる。

(答) 183 個

3.

(1)

与式より

$$\begin{aligned}\int_0^{k+1} f_{k+1}(x) dx &= \int_0^k f_k(x) dx - k^2 - k \\ \Leftrightarrow \left[-x^3 - x^2 + a_{k+1}x\right]_0^{k+1} &= \left[-x^3 - x^2 + a_kx\right]_0^k - k^2 - k \\ \Leftrightarrow -(k+1)^3 - (k+1)^2 + (k+1)a_{k+1} &= -k^3 - k^2 + ka_k - k^2 - k \\ \Leftrightarrow (k+1)a_{k+1} &= ka_k + 2(k+1)^2\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad (k+1)a_{k+1} = ka_k + 2(k+1)^2$$

(2)

$b_k = ka_k$ とおくと (1) より

$$\begin{aligned}b_{k+1} &= b_k + 2(k+1)^2 \\ \Leftrightarrow b_{k+1} - b_k &= 2(k+1)^2\end{aligned}$$

となるから、 $k \geq 2$ のとき、

$$\begin{aligned}b_k &= b_1 + \sum_{l=1}^{k-1} (b_{l+1} - b_l) \\ &= 1 \cdot a_1 + \sum_{l=1}^{k-1} 2(l+1)^2 \\ &= 2 + 2 \sum_{l=2}^k l^2 \\ &= 2 + 2 \left\{ \frac{1}{6} k(k+1)(2k+1) - 1 \right\} \\ &= \frac{1}{3} k(k+1)(2k+1)\end{aligned}$$

となる。したがって、

$$\begin{aligned}ka_k &= \frac{1}{3} k(k+1)(2k+1) \\ \Leftrightarrow a_k &= \frac{1}{3} (k+1)(2k+1)\end{aligned}$$

であり、これは $k=1$ のときも成り立つ。

$$(\text{答}) \quad a_k = \frac{1}{3} (k+1)(2k+1)$$

(3)

$$\begin{aligned}\int_0^k f_k(x) dx &= ka_k - k^3 - k^2 \\ &= \frac{1}{3} k(k+1)(2k+1) - k^3 - k^2 \\ &= -\frac{1}{3} (k^3 - k)\end{aligned}$$

となるから

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n \int_0^k f_k(x) dx &= -\frac{1}{3} \sum_{k=1}^n (k^3 - k) \\ &= -\frac{1}{3} \left[\left\{ \frac{1}{2} n(n+1) \right\}^2 - \frac{1}{2} n(n+1) \right] \\ &= -\frac{1}{6} n(n+1) \left\{ \frac{1}{2} n(n+1) - 1 \right\} \\ &= -\frac{1}{12} n(n+1)(n^2 + n - 2) \\ &= -\frac{1}{12} n(n-1)(n+1)(n+2)\end{aligned}$$

となる。

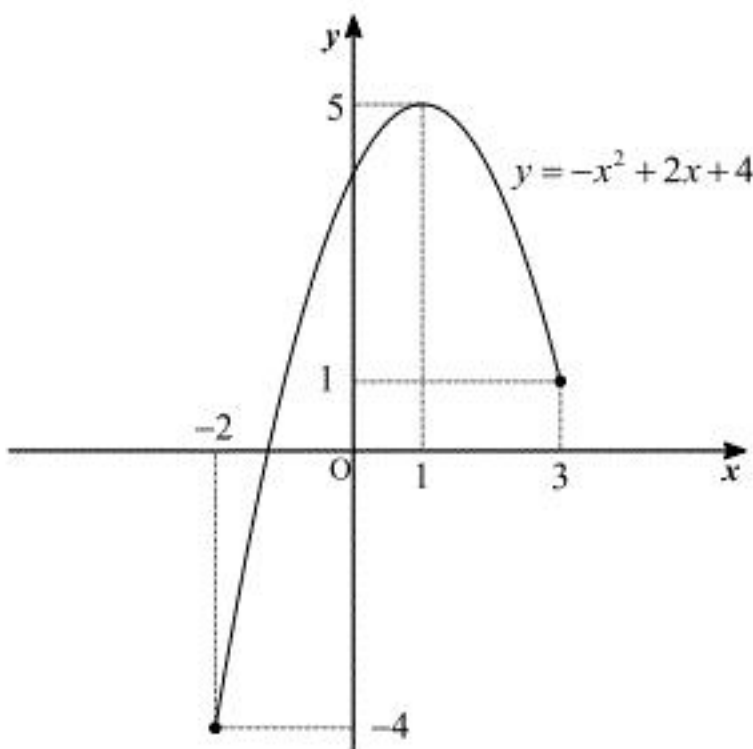
$$(\text{答}) \quad \sum_{k=1}^n \int_0^k f_k(x) dx = -\frac{1}{12} n(n-1)(n+1)(n+2)$$

4.

(1)

$$y = -x^2 + 2x + 4 = -(x-1)^2 + 5$$

となるから、与えられた関数のグラフは下図のようになる。



(答) 前図

(2)

Cの座標を $(t, -t^2 + 2t + 4)$ ($-2 < t < 3$) とする。ここで

$$\begin{cases} \overline{AB} = (5, 5) \\ \overline{AC} = (t+2, -t^2 + 2t + 8) \end{cases}$$

となるから、 $\triangle ABC$ の面積を $S(t)$ とすると、

$$\begin{aligned} S(t) &= \frac{1}{2} |5 \cdot (t+2) - 5 \cdot (-t^2 + 2t + 8)| \\ &= \frac{5}{2} |t^2 - t - 6| \\ &= \frac{5}{2} |(t-3)(t+2)| \\ &= -\frac{5}{2} (t^2 - t - 6) \quad (\because -2 < t < 3) \end{aligned}$$

と表せる。よってこれが15となるとき

$$\begin{aligned} -\frac{5}{2} (t^2 - t - 6) &= 15 \\ \Leftrightarrow t^2 - t &= 0 \\ \Leftrightarrow t(t-1) &= 0 \\ \therefore t &= 0, 1 \end{aligned}$$

となるから、求める点Cの座標は、

$$(0, 4) \text{ または } (1, 5)$$

となる。

(答) $(0, 4)$ または $(1, 5)$

(3)

$$S(t) = -\frac{5}{2} (t^2 - t - 6) = -\frac{5}{2} \left\{ \left(t - \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{25}{4} \right\} \quad (-2 < t < 3)$$

となるから、 $S(t)$ は $t = \frac{1}{2}$ のとき最大であり、このとき点Cの座標は、

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{19}{4} \right)$$

となる。

(答) $\left(\frac{1}{2}, \frac{19}{4} \right)$

(4)

A $(-2, -4)$, B $(3, 1)$, C $(t, -t^2 + 2t + 4)$ であるから

$$\begin{aligned} AC &= BC \\ \Leftrightarrow AC^2 &= BC^2 \\ \Leftrightarrow (t+2)^2 + \{(-t^2 + 2t + 4) + 4\}^2 &= (t-3)^2 + \{(-t^2 + 2t + 4) - 1\}^2 \\ \Leftrightarrow t^2 + 4t + 4 + (-t^2 + 2t + 4)^2 &= 8(-t^2 + 2t + 4) + 16 \\ &= t^2 - 6t + 9 + (-t^2 + 2t + 4)^2 - 2(-t^2 + 2t + 4) + 1 \\ \Leftrightarrow 10t + 10(-t^2 + 2t + 4) + 10 &= 0 \\ \Leftrightarrow t^2 - 3t - 5 &= 0 \\ \therefore t &= \frac{3 - \sqrt{29}}{2} \quad (\because -2 < t < 3) \end{aligned}$$

となる。ここで、

$$t^2 - 3t - 5 = 0 \Leftrightarrow t^2 = 3t + 5$$

を利用すると、点Cのy座標は

$$\begin{aligned} -t^2 + 2t + 4 &= -(3t + 5) + 2t + 4 \\ &= -t - 1 \\ &= \frac{-5 + \sqrt{29}}{2} \end{aligned}$$

となる。よって求める座標は

$$\left(\frac{3 - \sqrt{29}}{2}, \frac{-5 + \sqrt{29}}{2} \right)$$

となる。

(答) $\left(\frac{3 - \sqrt{29}}{2}, \frac{-5 + \sqrt{29}}{2} \right)$