

1.
(1)

[1] $0 \leq t < 1$ のとき

球 B は球 A の内部にあるから、共通部分は球 B に一致する。よって、その体積は、

$$V(t) = \frac{4}{3}\pi \cdot 1^3 = \frac{4}{3}\pi$$

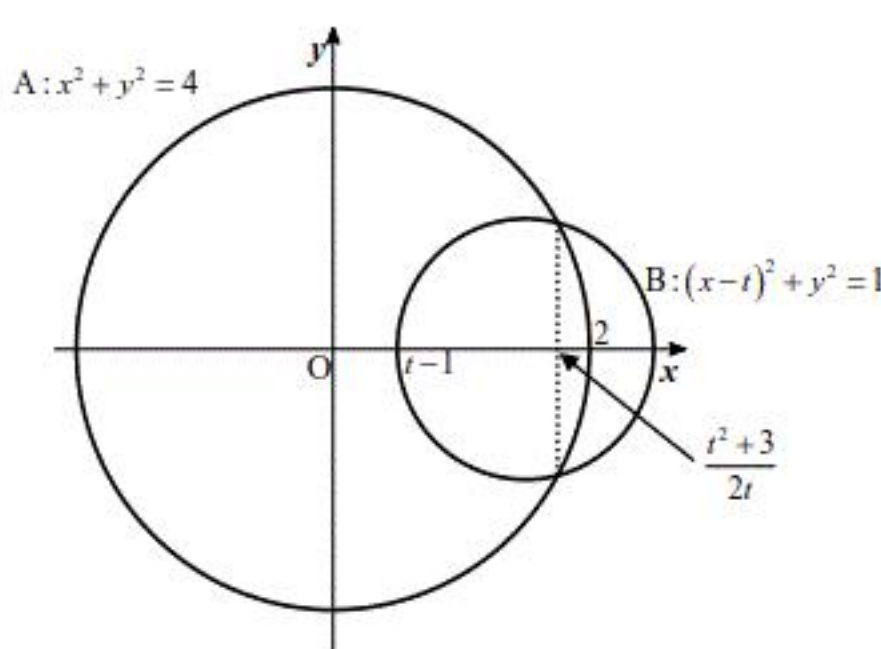
である。

[2] $1 \leq t \leq 3$ のとき

$t \leq 2+1$ であるから球 A と球 B は交わる。また、球 A と球 B の方程式から y, z を消去すると、球 A と球 B が交わる x 座標、

$$\begin{aligned} x^2 - (x-t)^2 &= 3 \\ \Leftrightarrow 2tx &= t^2 + 3 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{t^2+3}{2t} \quad (\because t \neq 0) \end{aligned}$$

が得られるから、平面 $z=0$ における球 A と球 B の断面は次の図のようになる。



球 A と球 B の共通部分は、平面 $x=0$ における球 A と球 B の断面の共通部分を x 軸を中心に回転させたものであるから、その体積は、

$$\begin{aligned} V(t) &= \int_{t-1}^{\frac{t^2+3}{2t}} \pi \left\{ 1 - (x-t)^2 \right\} dx + \int_{\frac{t^2+3}{2t}}^2 \pi (4 - x^2) dx \\ &= \pi \left[x - \frac{1}{3}(x-t)^3 \right]_{t-1}^{\frac{t^2+3}{2t}} + \pi \left[4x - \frac{x^3}{3} \right]_{\frac{t^2+3}{2t}}^2 \\ &= \pi \left\{ \frac{t^2+3}{2t} - \frac{1}{3} \left(\frac{t^2+3}{2t} - t \right)^3 - (t-1) + \frac{1}{3} \cdot (-1)^3 \right\} + \pi \left\{ 4 \cdot 2 - \frac{2^3}{3} - 4 \cdot \frac{t^2+3}{2t} + \frac{1}{3} \left(\frac{t^2+3}{2t} \right)^3 \right\} \\ &= \pi \left\{ \frac{t}{2} + \frac{3}{2t} + \frac{t^3}{24} - \frac{3t}{8} + \frac{9}{8t} - \frac{9}{8t^3} - t + 1 - \frac{1}{3} \right\} + \pi \left\{ 8 - \frac{8}{3} - 2t - \frac{6}{t} + \frac{t^3}{24} + \frac{3t}{8} + \frac{9}{8t} + \frac{9}{8t^3} \right\} \\ &= \pi \left(\frac{t^3}{12} - \frac{5}{2}t + 6 - \frac{9}{4t} \right) \end{aligned}$$

である。

$$(答) \quad V(t) = \begin{cases} \frac{4}{3}\pi & (0 \leq t < 1 \text{ のとき}) \\ \pi \left(\frac{t^3}{12} - \frac{5}{2}t + 6 - \frac{9}{4t} \right) & (1 \leq t \leq 3 \text{ のとき}) \end{cases}$$

(2)

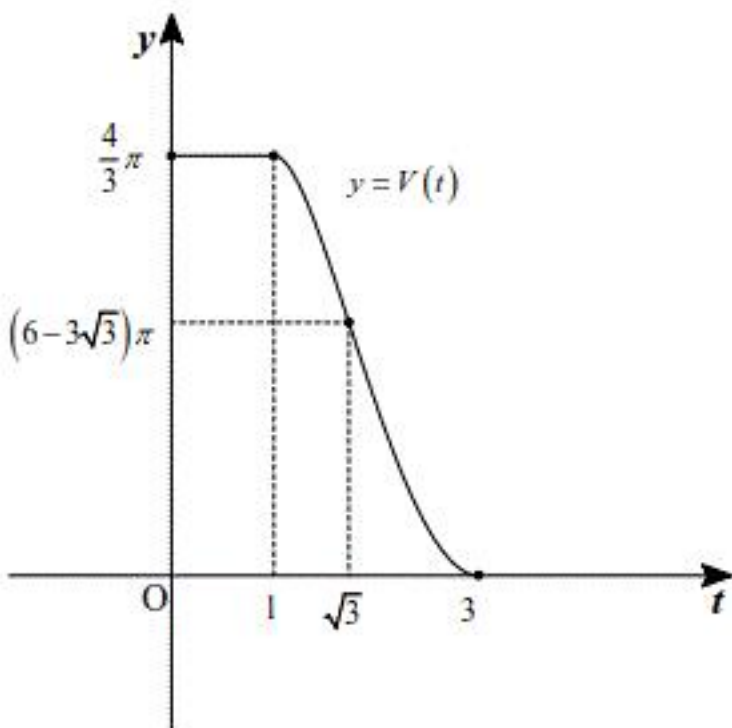
$1 \leq t \leq 3$ のもと、

$$\begin{aligned} V'(t) &= \pi \left(\frac{t^2}{4} - \frac{5}{2} + \frac{9}{4t^2} \right) \\ &= \frac{\pi}{4t^2} (t^4 - 10t^2 + 9) \\ &= \frac{\pi}{4t^2} (t^2 - 1)(t^2 - 9) \\ V''(t) &= \pi \left(\frac{t}{2} - \frac{9}{2t^3} \right) \\ &= \frac{\pi}{2t^3} (t^4 - 9) \\ &= \frac{\pi}{2t^3} (t^2 + 3)(t^2 - 3) \end{aligned}$$

である。ゆえに、 $1 \leq t \leq 3$ の範囲で $V'(t) \leq 0$ であり、 $V''(t) = 0$ を満たす t は $t = \sqrt{3}$ である。よって、増減表は以下の通りとなる。

t	1	...	$\sqrt{3}$	...	3
$V'(t)$	0	-	-	-	0
$V''(t)$		-	0	+	
$V(t)$	$\frac{4}{3}\pi$	$\searrow$	$(6-3\sqrt{3})\pi$	$\searrow$	0

よって、グラフは以下の通りとなる。



(答) 前図

(3)

(2) のグラフより、

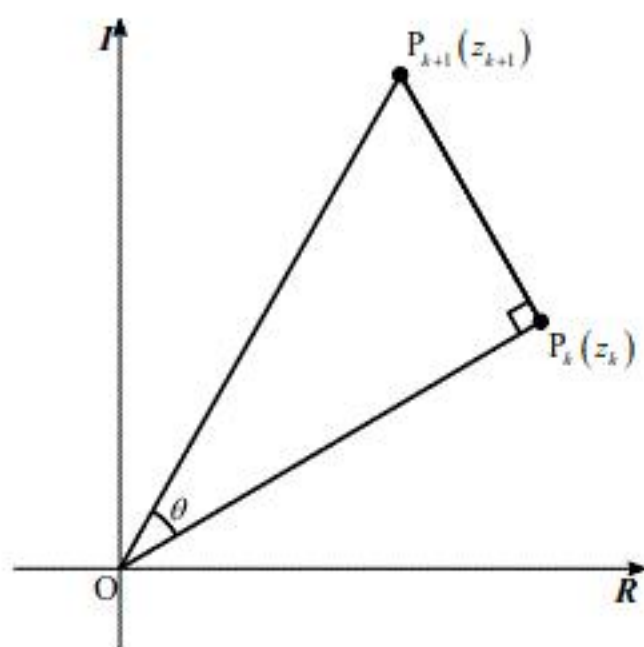
$$\begin{aligned} \int_0^3 V(t) dt &= \int_0^1 \frac{4}{3}\pi dt + \int_1^3 \pi \left(\frac{t^3}{12} - \frac{5}{2}t + 6 - \frac{9}{4t} \right) dt \\ &= \pi \left[\frac{4}{3}t \right]_0^1 + \pi \left[\frac{t^4}{48} - \frac{5}{4}t^2 + 6t - \frac{9}{4} \log t \right]_1^3 \\ &= \pi \left(\frac{4}{3} - 0 \right) + \pi \left(\frac{3^4}{48} - \frac{5}{4} \cdot 3^2 + 6 \cdot 3 - \frac{9}{4} \log 3 - \frac{1}{48} + \frac{5}{4} - 6 + 0 \right) \\ &= \left(5 - \frac{9}{4} \log 3 \right) \pi \end{aligned}$$

である。

$$(答) \quad \left(5 - \frac{9}{4} \log 3 \right) \pi$$

2.

(1)



条件より、 $\triangle OP_k P_{k+1}$ は、 $\angle OP_k P_{k+1}$ が直角で、 $\angle P_k O P_{k+1} = \theta$ である直角三角形となる。これより、

$$\begin{aligned} OP_{k+1} &= \frac{1}{\cos \theta} OP_k \quad (\because \cos \theta \neq 0) \\ \arg z_{k+1} &= \arg z_k + \theta \end{aligned}$$

が成立する。よって、

$$\begin{aligned} z_{k+1} &= z_k \cdot \frac{1}{\cos \theta} \cdot (\cos \theta + i \sin \theta) \\ &= z_k (1 + i \tan \theta) \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad z_{k+1} = z_k (1 + i \tan \theta)$$

(2)

$$\begin{aligned} |z_{k+1}| &= |z_k (1 + i \tan \theta)| \\ &= |z_k| |1 + i \tan \theta| \\ &= \sqrt{1 + \tan^2 \theta} |z_k| \end{aligned}$$

が成立する。よって、

$$\begin{aligned} |z_k| &= |z_0| \sqrt{1 + \tan^2 \theta}^k \\ &= a \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \theta}}^k \\ &= a \cos^{-k} \theta \quad (\because \cos \theta > 0) \end{aligned}$$

である。したがって、

$$\begin{aligned} s_k &= \frac{1}{2} \cdot OP_k \cdot OP_{k+1} \cdot \sin \theta \\ &= \frac{a^2 \sin \theta}{2} \cdot \cos^{-2k-1} \theta \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad s_k = \frac{a^2 \sin \theta}{2} \cdot \cos^{-2k-1} \theta$$

(3)

(2)の結果より、

$$\begin{aligned} A_n &= \sum_{k=0}^{n-1} s_k \\ &= \frac{a^2 \sin \theta}{2 \cos \theta} \sum_{k=0}^{n-1} \cos^{-2k} \theta \\ &= \frac{a^2 \sin \theta}{2 \cos \theta} \cdot \frac{1 - \cos^{-2n} \theta}{1 - \cos^{-2} \theta} \\ &= \frac{a^2}{2} \cdot \frac{\sin \theta \cos \theta}{\cos^2 \theta - 1} \cdot (1 - \cos^{-2n} \theta) \\ &= \frac{a^2}{2 \tan \theta} (\cos^{-2n} \theta - 1) \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{a^2}{2 \tan \theta} (\cos^{-2n} \theta - 1)$$

3.

(1)

n 回目の投球で A がゲームに勝つ確率を a_n とする。A がボールを投げられるのは奇数回目のみであるから、 n が偶数のときは $a_n = 0$ である。 n が奇数のもと、A、B がそれぞれ $\frac{n-1}{2}$ 回ずつ的を外した後に A が的に当てるとき、題意を満たす。その確率は、

$$(1-p)^{\frac{n-1}{2}} (1-q)^{\frac{n-1}{2}} p$$

である。

$$(\text{答}) \quad a_n = \begin{cases} (1-p)^{\frac{n-1}{2}} (1-q)^{\frac{n-1}{2}} p & (n: \text{奇数}) \\ 0 & (n: \text{偶数}) \end{cases}$$

(2)

A が 1 回目、2 回目、... n 回目 ... で勝つ事象はそれぞれ排反であるから、A が勝つ確率を $P(A)$ とすると、

$$\begin{aligned} P(A) &= a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n p \{(1-p)(1-q)\}^k \\ &= p \cdot \frac{1}{1-(1-p)(1-q)} \\ &= \frac{p}{p+q-pq} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{p}{p+q-pq}$$

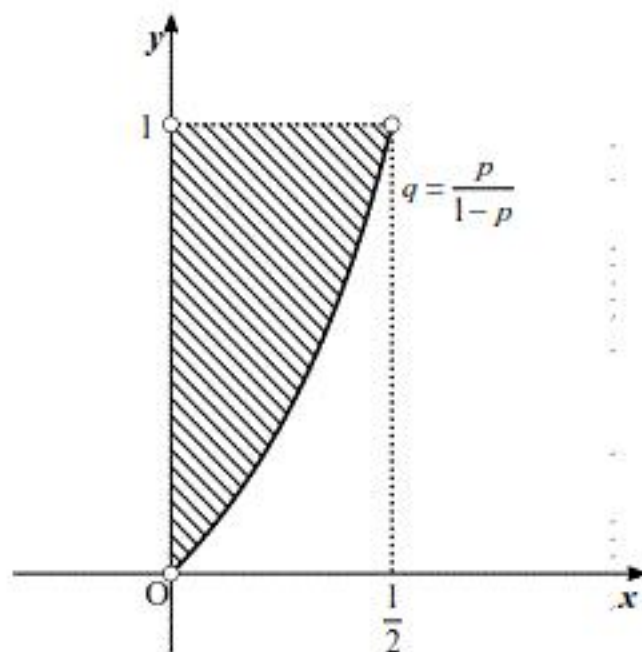
(3)

(2) より、題意を満たすのは、 $\frac{p}{p+q-pq} < \frac{1}{2}$ のときである。ここで、

$$\begin{aligned} \frac{p}{p+q-pq} &< \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow 2p &< p+q-pq \\ \Leftrightarrow q &> \frac{p}{1-p} \end{aligned}$$

であるから、題意を満たす条件は $0 < p < 1, \frac{p}{1-p} < q < 1$ である。このような (p, q) を pq 平面上

に図示すると以下の通りになる。ただし、白丸と境界を含まない。



$$(\text{答}) \quad \text{条件: } 0 < p < 1, \frac{p}{1-p} < q < 1, \text{ 領域: 前図 (白丸と境界を含まない)}$$