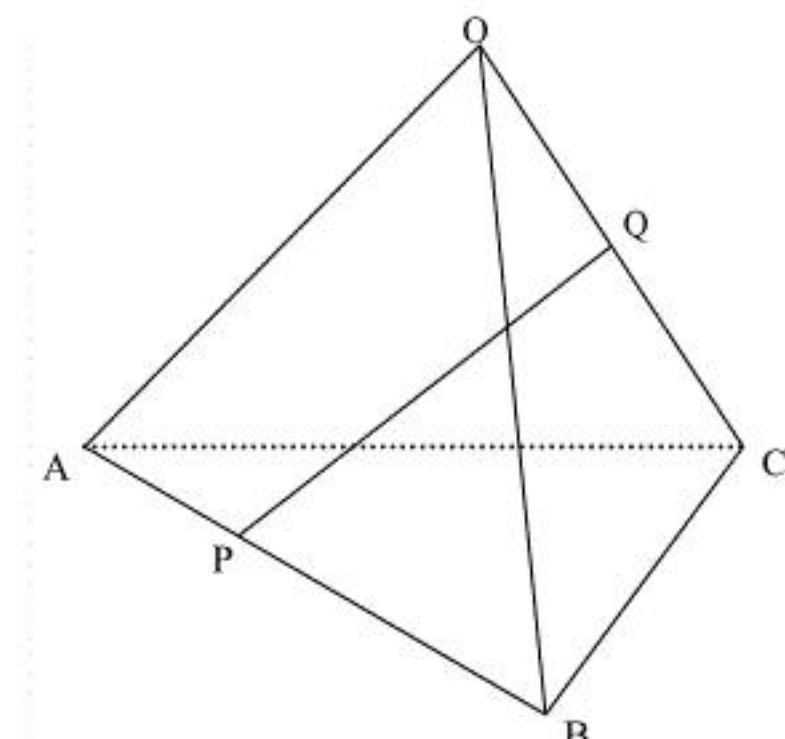


1

(1)



$$\overrightarrow{OP} = (1-s)\vec{a} + s\vec{b}$$

$$\overrightarrow{OQ} = t\vec{c}$$

より,

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = (s-1)\vec{a} - s\vec{b} + t\vec{c}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{PQ} = (s-1)\vec{a} - s\vec{b} + t\vec{c}$$

(2)

$|\vec{c}| = x$ とおくと,

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = \sqrt{5} \cdot x \cdot \cos \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{5}}{2}x$$

であり,

$$\overrightarrow{AB} \cdot \vec{c} = 0$$

$$\Leftrightarrow (\vec{b} - \vec{a}) \cdot \vec{c} = 0$$

$$\Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{b} \cdot \vec{c}$$

が成り立つ。また,

$$|\overrightarrow{AB}|^2 = 3^2$$

$$\Leftrightarrow |\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = 9$$

$$\Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 2$$

であるから,

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{PQ}|^2 &= (s-1)^2 |\vec{a}|^2 + s^2 |\vec{b}|^2 + t^2 |\vec{c}|^2 - 2s(s-1)\vec{a} \cdot \vec{b} - 2st\vec{b} \cdot \vec{c} + 2(s-1)t\vec{a} \cdot \vec{c} \\ &= 5(s-1)^2 + 8s^2 + t^2 x^2 - 4s(s-1) - \sqrt{5}stx + \sqrt{5}(s-1)tx \\ &= 9s^2 - 6s + 5 + t^2 x^2 - \sqrt{5}tx \end{aligned}$$

$$\therefore |\overrightarrow{PQ}|^2 = 9\left(s - \frac{1}{3}\right)^2 + x^2 \left(t - \frac{\sqrt{5}}{2x}\right)^2 + \frac{11}{4} \cdots \textcircled{1}$$

と表すことができる。これより, $|\overrightarrow{PQ}|$ は $s = \frac{1}{3}, t = \frac{\sqrt{5}}{2x}$ のとき最小となることがわかるので,

$$\frac{\sqrt{5}}{2x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \sqrt{5}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad OC = \sqrt{5}$$

(3)

①より, $|\overrightarrow{PQ}|$ が最小となるとき,

$$s = \frac{1}{3}$$

である。また(2)より,

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot \sqrt{5} = \frac{5}{2}$$

である。このとき,

$$\overrightarrow{OP} = \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$$

であるから,

$$|\overrightarrow{OP}|^2 = \frac{4}{9}|\vec{a}|^2 + 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \vec{a} \cdot \vec{b} + \frac{1}{9}|\vec{b}|^2 = 4$$

$$\overrightarrow{OP} \cdot \vec{c} = \frac{2}{3}\vec{a} \cdot \vec{c} + \frac{1}{3}\vec{b} \cdot \vec{c} = \frac{5}{2}$$

となるので, $\triangle OPC$ の面積は,

$$\begin{aligned} \triangle OPC &= \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{OP}|^2 |\vec{c}|^2 - (\overrightarrow{OP} \cdot \vec{c})^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{4 \cdot 5 - \left(\frac{5}{2}\right)^2} \\ &= \frac{\sqrt{55}}{4} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad s = \frac{1}{3}, \triangle OPC = \frac{\sqrt{55}}{4}$$

2

(1)

金貨どうし、および銀貨どうしは区別せずに考える。ここで、金の連を G 、銀の連を S と表すことにする。題意より、連が 5 個になるのは、 $GSGSG$ または $SGSGS$ のいずれかの順に並ぶときに限られる。

[1] $GSGSG$ の順に並ぶとき

金貨 6 枚を 3 箇所の連に分けるのは、金貨 6 枚を一行に並べ、間の 5 ヶ所のうち連の分かれ目となる 2 ヶ所を選ぶと考えて、

$${}_5C_2 = 10 \text{ (通り)}$$

であり、同様に、銀貨 3 枚を 2 箇所に分けるのは、

$${}_2C_1 = 2 \text{ (通り)}$$

であるから、並べ方の総数は、

$$10 \times 2 = 20 \text{ (通り)}$$

である。

[2] $SGSGS$ の順に並ぶとき

[1]と同様に考えて、

$${}_5C_1 \times {}_2C_2 = 5 \text{ (通り)}$$

である。

以上、[1], [2]より、連が 5 個になる並べ方は、

$$20 + 5 = 25 \text{ (通り)}$$

であり、金貨 6 枚、銀貨 3 枚の並べ方の総数は、

$$\frac{9!}{6!3!} = 84 \text{ (通り)}$$

であるから、求める確率は、

$$\frac{20+5}{84} = \frac{25}{84}$$

である。

(答) $\frac{25}{84}$

(2)

まず $GSGS \cdots GS$ となる場合を考える。このとき、 G, S はそれぞれ $\frac{k}{2}$ 個ずつ存在する。金貨ま

たは銀貨 n 枚を一行に並べ、間の $n-1$ ヶ所のうち連の分かれ目となる $\frac{k}{2}-1$ ヶ所を選ぶと考

えると、並べ方は、

$${}_{n-1}C_{\frac{k}{2}-1} \times {}_{n-1}C_{\frac{k}{2}-1} \text{ (通り)}$$

であり、 $SGSG \cdots SG$ となる場合も全く同様である。硬貨の並べ方の総数は、

$${}_{2n}C_n \text{ (通り)}$$

であるから、求める確率は、

$$\begin{aligned} \frac{2 \times {}_{n-1}C_{\frac{k}{2}-1} \times {}_{n-1}C_{\frac{k}{2}-1}}{{}_{2n}C_n} &= \frac{2 \cdot \left\{ \frac{(n-1)!}{\left(n-\frac{k}{2}\right)! \left(\frac{k}{2}-1\right)!} \right\}^2}{\frac{(2n)!}{n!n!}} \\ &= \frac{2 \{n!(n-1)!\}^2}{(2n)! \left\{ \left(n-\frac{k}{2}\right)! \left(\frac{k}{2}-1\right)! \right\}^2} \\ &= \frac{2n^2 \{(n-1)!\}^4}{(2n)! \left\{ \left(n-\frac{k}{2}\right)! \left(\frac{k}{2}-1\right)! \right\}^2} \\ &= \frac{n \{(n-1)!\}^4}{(2n-1)! \left\{ \left(n-\frac{k}{2}\right)! \left(\frac{k}{2}-1\right)! \right\}^2} \end{aligned}$$

である。

(答) $\frac{n \{(n-1)!\}^4}{(2n-1)! \left\{ \left(n-\frac{k}{2}\right)! \left(\frac{k}{2}-1\right)! \right\}^2}$

〔補足〕

変形によって形がきれいにならないので、 $\frac{2 \left({}_{n-1}C_{\frac{k}{2}-1} \right)^2}{{}_{2n}C_n}$ の形で答えとしてもよいと思われる。

(3)

まず $GSGS \cdots SG$ となる場合を考える。 G は $\frac{\ell+1}{2}$ 個、 S は $\frac{\ell-1}{2}$ 個存在するから、(2)と同様に、

並べ方は、

$${}_{n-1}C_{\frac{\ell+1}{2}-1} \times {}_{n-1}C_{\frac{\ell-1}{2}-1} \text{ (通り)}$$

である。 $SGSG \cdots GS$ となる場合も同様に考えて、

$${}_{n-1}C_{\frac{\ell+1}{2}-1} \times {}_{n-1}C_{\frac{\ell-1}{2}-1} \text{ (通り)}$$

となることがわかる。したがって、求める確率は、

$$\begin{aligned} \frac{2 \times {}_{n-1}C_{\frac{\ell+1}{2}-1} \times {}_{n-1}C_{\frac{\ell-1}{2}-1}}{{}_{2n}C_n} &= \frac{2 \cdot \frac{(n-1)!}{\left(n-\frac{\ell+1}{2}\right)! \left(\frac{\ell+1}{2}-1\right)!} \cdot \frac{(n-1)!}{\left(n-\frac{\ell-1}{2}\right)! \left(\frac{\ell-1}{2}-1\right)!}}{\frac{(2n)!}{n!n!}} \\ &= \frac{2 \{n!(n-1)!\}^2}{(2n)! \left(n-\frac{\ell+1}{2}\right)! \left(n-\frac{\ell-1}{2}\right)! \left(\frac{\ell-1}{2}\right)! \left(\frac{\ell-3}{2}\right)!} \\ &= \frac{2n^2 \{(n-1)!\}^4}{(2n)! \left(n-\frac{\ell-1}{2}\right)! \left(\frac{\ell-1}{2}\right)! \left\{ \left(n-\frac{\ell+1}{2}\right)! \left(\frac{\ell-3}{2}\right)! \right\}^2} \\ &= \frac{n \{(n-1)!\}^4}{(2n-1)! \left(n-\frac{\ell-1}{2}\right)! \left(\frac{\ell-1}{2}\right)! \left\{ \left(n-\frac{\ell+1}{2}\right)! \left(\frac{\ell-3}{2}\right)! \right\}^2} \end{aligned}$$

である。

(答) $\frac{n \{(n-1)!\}^4}{(2n-1)! \left(n-\frac{\ell-1}{2}\right)! \left(\frac{\ell-1}{2}\right)! \left\{ \left(n-\frac{\ell+1}{2}\right)! \left(\frac{\ell-3}{2}\right)! \right\}^2}$

〔補足〕

(2)同様、 $\frac{2 \times {}_{n-1}C_{\frac{\ell-1}{2}} \times {}_{n-1}C_{\frac{\ell-3}{2}}}{{}_{2n}C_n}$ の形で答えとしてもよいと思われる。

3

(1)

$x > 0$ において、

$$f(x) = \frac{2 \log x}{x^2}$$

であるから、

$$f'(x) = 2 \cdot \frac{\frac{1}{x} \cdot x^2 - (\log x) \cdot 2x}{x^4} = \frac{2(1 - 2 \log x)}{x^3}$$

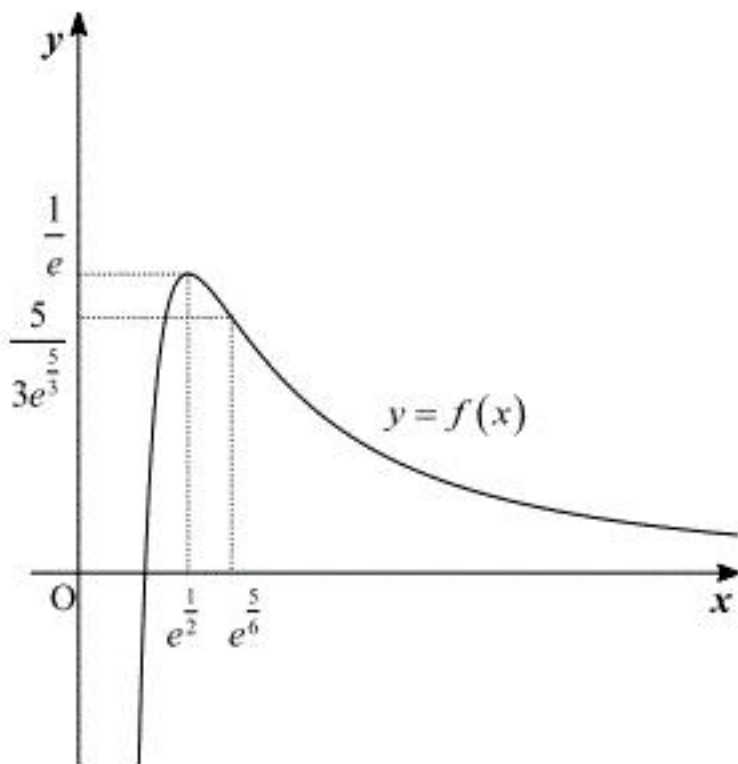
$$f''(x) = 2 \cdot \frac{-\frac{2}{x^2} \cdot x^3 - (1 - 2 \log x) \cdot 3x^2}{x^6} = \frac{2(6 \log x - 5)}{x^4}$$

となるので、 $x > 0$ における増減表は以下のようになる。

x	(0)	...	$e^{\frac{1}{2}}$	...	$e^{\frac{5}{6}}$	...
$f'(x)$		+	0	-	-	-
$f''(x)$		-	-	-	0	+
$f(x)$		$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	$\frac{5}{3e^{\frac{5}{3}}}$	$\searrow$

$$\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$$

であるから、極大値 $\frac{1}{e}$ 、変曲点 $\left(e^{\frac{5}{6}}, \frac{5}{3e^{\frac{5}{3}}}\right)$ であり、グラフは以下のようになる。



(答) 増減, 凹凸: 前表, 極大値: $\frac{1}{e}$, 変曲点 $\left(e^{\frac{5}{6}}, \frac{5}{3e^{\frac{5}{3}}}\right)$, グラフ: 前図

(2)

題意を満たすとき、

$$f(p) = g(p) \quad \text{かつ} \quad f'(p) = g'(p)$$

が成り立つ。

$$f(p) = g(p)$$

$$\Leftrightarrow \frac{2 \log p}{p^2} = kp^2$$

$$\Leftrightarrow 2 \log p = kp^4 \quad \dots \textcircled{1}$$

であり、

$$g'(x) = 2kx$$

より、

$$f'(p) = g'(p)$$

$$\Leftrightarrow \frac{2(1 - 2 \log p)}{p^3} = 2kp$$

$$\Leftrightarrow 1 - 2 \log p = kp^4 \quad \dots \textcircled{2}$$

が成り立つ。したがって、①, ②より、

$$2 \log p = 1 - 2 \log p$$

$$\Leftrightarrow 4 \log p = 1$$

$$\Leftrightarrow p = e^{\frac{1}{4}}$$

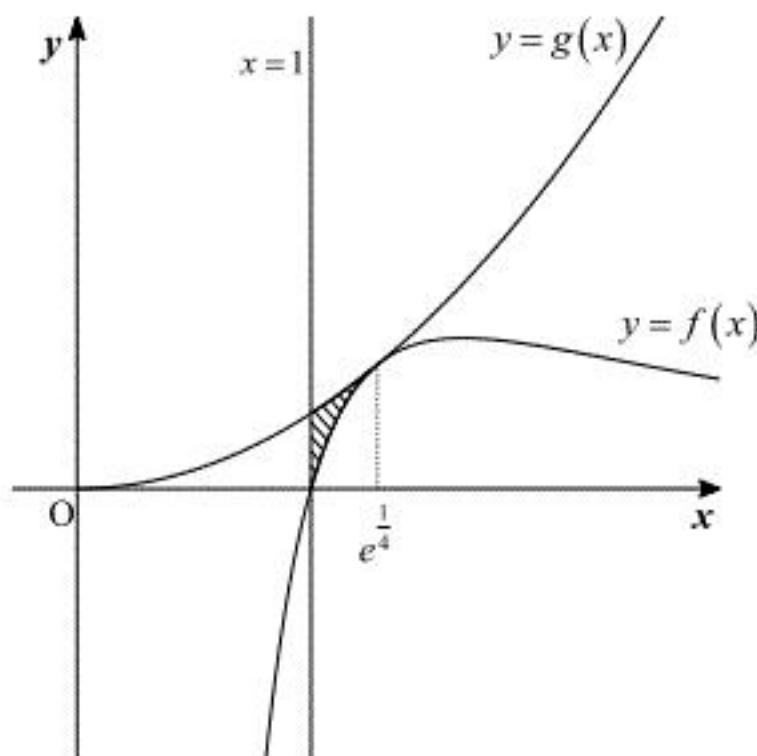
である。このとき、①より

$$k = \frac{2 \log p}{p^4} = \frac{1}{2e}$$

であり、 $k > 0$ を満たす。よって、求める値は $p = e^{\frac{1}{4}}$ である。

(答) $p = e^{\frac{1}{4}}$

(3)



図の斜線部分の面積を求めればよいので、

$$S = \int_1^{e^{\frac{1}{4}}} \left(kx^2 - \frac{2 \log x}{x^2} \right) dx$$

と表すことができる。ここで、

$$\begin{aligned} \int_1^{e^{\frac{1}{4}}} \frac{\log x}{x^2} dx &= \int_1^{e^{\frac{1}{4}}} \left(-\frac{1}{x} \right)' \log x dx \\ &= \left[-\frac{\log x}{x} \right]_1^{e^{\frac{1}{4}}} + \int_1^{e^{\frac{1}{4}}} \frac{1}{x^2} dx \\ &= -\frac{1}{4e^{\frac{1}{4}}} + \left[-\frac{1}{x} \right]_1^{e^{\frac{1}{4}}} \\ &= 1 - \frac{5}{4e^{\frac{1}{4}}} \end{aligned}$$

である。したがって、 $k = \frac{1}{2e}$ を代入して

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2e} \left[\frac{x^3}{3} \right]_1^{e^{\frac{1}{4}}} - 2 \left(1 - \frac{5}{4e^{\frac{1}{4}}} \right) \\ &= \frac{1}{6e} \left(e^{\frac{3}{4}} - 1 \right) - 2 + \frac{5}{2e^{\frac{1}{4}}} \\ &= \frac{8}{3e^{\frac{1}{4}}} - \frac{1}{6e} - 2 \end{aligned}$$

となる。

(答) $S = \frac{8}{3e^{\frac{1}{4}}} - \frac{1}{6e} - 2$

4

(1)

$$\begin{aligned}
 a_{n+6} &= 2^{n+6-1} \cos \frac{(n+6-1)\pi}{3} \\
 &= 2^6 \cdot 2^{n-1} \cos \left\{ \frac{(n-1)\pi}{3} + 2\pi \right\} \\
 &= 2^6 \cdot 2^{n-1} \cos \frac{(n-1)\pi}{3} \\
 &= 2^6 \cdot a_n
 \end{aligned}$$

が成り立つので、自然数 m に対し、 a_{6m-5} から a_{6m} までの和を T_m とすると、

$$\begin{aligned}
 T_{m+1} &= a_{6m+1} + a_{6m+2} + a_{6m+3} + a_{6m+4} + a_{6m+5} + a_{6m+6} \\
 &= 2^6 \cdot a_{6m-5} + 2^6 \cdot a_{6m-4} + 2^6 \cdot a_{6m-3} + 2^6 \cdot a_{6m-2} + 2^6 \cdot a_{6m-1} + 2^6 \cdot a_{6m} \\
 &= 2^6 \cdot T_m
 \end{aligned}$$

となる。ここで、

$$T_1 = 1 \cdot 1 + 2 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 8 \cdot (-1) + 16 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 32 \cdot \frac{1}{2} = 0$$

であるから、

$$\begin{aligned}
 S_{6m} &= \sum_{l=1}^m (a_{6l-5} + a_{6l-4} + a_{6l-3} + a_{6l-2} + a_{6l-1} + a_{6l}) \\
 &= \sum_{l=1}^m T_l \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

となるので、

$$\begin{aligned}
 S_{50} &= S_{48} + a_{49} + a_{50} \\
 &= 0 + 2^{48} \cdot 1 + 2^{49} \cdot \frac{1}{2} \\
 &= 2^{49}
 \end{aligned}$$

である。

(答) $S_{50} = 2^{49}$

(2)

$m \geq 2$ のとき、

$$\begin{aligned}
 |S_{6m-5}| &= |S_{6(m-1)} + a_{6m-5}| \\
 &= \left| 0 + 2^{6m-5-1} \cos \frac{(6m-5-1)\pi}{3} \right| \\
 &= |2^{6m-6}| \\
 &= 2^{6m-6}
 \end{aligned}$$

である。 $S_1 = a_1 = 1$ より、これは $m=1$ のときも成り立つ。これを利用して

$|S_{6m-4}|, |S_{6m-3}|, |S_{6m-2}|, |S_{6m-1}|, |S_{6m}|$ をそれぞれ求めると、

$$\begin{aligned}
 |S_{6m-4}| &= |S_{6m-5} + a_{6m-4}| \\
 &= \left| 2^{6m-6} + 2^{6m-4-1} \cos \frac{(6m-4-1)\pi}{3} \right| \\
 &= |2^{6m-5}| \\
 &= 2^{6m-5}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 |S_{6m-3}| &= |S_{6m-4} + a_{6m-3}| \\
 &= \left| 2^{6m-5} + 2^{6m-3-1} \cos \frac{(6m-3-1)\pi}{3} \right| \\
 &= |0| \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 |S_{6m-2}| &= |S_{6m-3} + a_{6m-2}| \\
 &= \left| 0 + 2^{6m-2-1} \cos \frac{(6m-2-1)\pi}{3} \right| \\
 &= |-2^{6m-3}| \\
 &= 2^{6m-3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 |S_{6m-1}| &= |S_{6m-2} + a_{6m-1}| \\
 &= \left| -2^{6m-3} + 2^{6m-1-1} \cos \frac{(6m-1-1)\pi}{3} \right| \\
 &= |-2^{6m-2}| \\
 &= 2^{6m-2}
 \end{aligned}$$

$$|S_{6m}| = 0$$

となる。したがって $|S_n| = 0$ または 2^{n-1} であるから、 $|S_n| \geq 10^{50}$ であるためには $2^{n-1} \geq 10^{50}$ が必要である。ここで、

$$\begin{aligned}
 2^{n-1} &\geq 10^{50} \\
 \Leftrightarrow (n-1) \log_{10} 2 &\geq 50 \\
 \Leftrightarrow n &\geq \frac{50 + \log_{10} 2}{\log_{10} 2} (=167.1\dots)
 \end{aligned}$$

$\therefore n \geq 168$ (n は自然数)

より、 $n \geq 168$ が必要とわかる。 $n=168 (=6 \cdot 28)$ のとき $|S_n| = 0$ であり不適である。

$n=169 (=6 \cdot 29 - 5)$ のとき $|S_n| = 2^{n-1}$ より適する。以上より、求める自然数 n は、

$$n = 169$$

である。

(答) $n = 169$