

1

(1)

曲線 C と直線 ℓ_1 の方程式から、 y を消去することで x の方程式、

$$x^3 + 1 = 3x - 1$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 3x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2(x+2) = 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

が得られる。これは $x=1$ で重解をもつから、 $x=1$ で曲線 C と直線 ℓ_1 は接する。したがって、

点 P の座標は $(1, 2)$ である。 $(x^3 + 1)' = 3x^2$ であるから、いま、 $Q(t, t^3 + 1) (t \neq 1)$ とおくと、曲線

C の点 Q における接線の方程式は、

$$y - (t^3 + 1) = 3t^2(x - t)$$

$$\Leftrightarrow y = 3t^2x - 2t^3 + 1 \quad \dots \textcircled{2}$$

となる。この接線が点 P を通るとき、 t の値は、

$$2 = 3t^2 \cdot 1 - 2t^3 + 1$$

$$\Leftrightarrow 2t^3 - 3t^2 + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2t+1)(t-1)^2 = 0$$

$$\therefore t = -\frac{1}{2} \quad (\because t \neq 1)$$

となるから、直線 ℓ_2 の方程式は②式より、

$$y = 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 x - 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^3 + 1$$

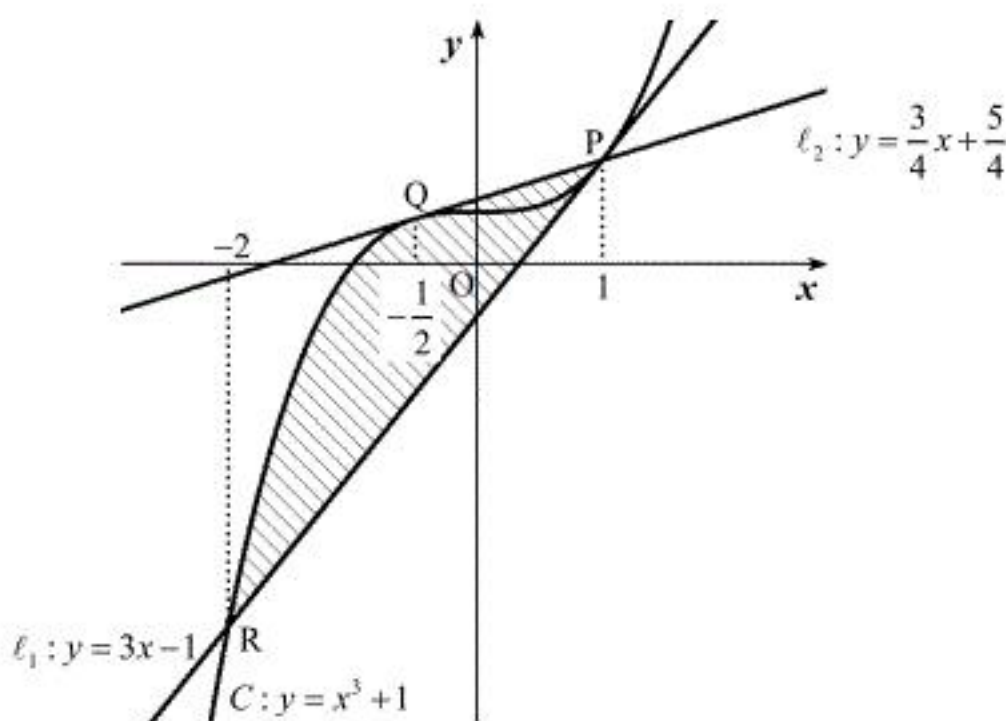
$$\Leftrightarrow y = \frac{3}{4}x + \frac{5}{4}$$

である。

$$(\text{答}) \quad y = \frac{3}{4}x + \frac{5}{4}$$

(2)

(1)の①より、点 R の x 座標は $x = -2$ である。求める面積を以下に斜線部で示す。



上図より、求める面積を S とすると、

$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^1 \left\{ (x^3 + 1) - (3x - 1) \right\} dx + \int_{-\frac{1}{2}}^1 \left\{ \left(\frac{3}{4}x + \frac{5}{4} \right) - (x^3 + 1) \right\} dx \\ &= \int_{-2}^1 (x^3 - 3x + 2) dx - \int_{-\frac{1}{2}}^1 \left(x^3 - \frac{3}{4}x - \frac{1}{4} \right) dx \\ &= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + 2x \right]_{-2}^1 - \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{8}x^2 - \frac{1}{4}x \right]_{-\frac{1}{2}}^1 \\ &= \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{2} + 2 \right) - (4 - 6 - 4) - \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{8} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{64} - \frac{3}{32} + \frac{1}{8} \right) \\ &= \frac{459}{64} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{459}{64}$$

2

(1)

問題文より、3点A, B, Dは一直線上にあるから、実数 k を用いて $\overrightarrow{AD} = k\overrightarrow{AB}$ と表せる。したがって、ベクトル $\overrightarrow{OD}$ は、

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{AB}$$

と表せる。

(答) $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{AB}$ (k は実数)

(2)

(1)より、ベクトル $\overrightarrow{OD}$ を成分表示すると、 $\overrightarrow{AB} = (-2, 3, 1)$ であるから、

$$\overrightarrow{OD} = (4, 0, 2) + k(-2, 3, 1) = (4 - 2k, 3k, k + 2)$$

となり、これは点Dの座標である。点Dが xy 平面上にあるとき、点Dの z 座標が0であるから k の値は、

$$k + 2 = 0$$

$$\therefore k = -2$$

となる。したがって、求める座標は $D(8, -6, 0)$ である。

(答) $D(8, -6, 0)$

(3)

三角形ABCと点Pが同一平面上にあるとき、ベクトル $\overrightarrow{AP}$ は実数 s, t を用いて、

$$\overrightarrow{AP} = s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC}$$

と表せる。ここで、両辺を成分表示すると、 $\overrightarrow{AP} = (x - 4, y, -2)$ 、 $\overrightarrow{AC} = (1, 3, -2)$ であるから、

$$\begin{aligned} (x - 4, y, -2) &= s(-2, 3, 1) + t(1, 3, -2) \\ &= (-2s + t, 3s + 3t, s - 2t) \end{aligned}$$

となる。右辺と左辺が一致するから、連立方程式、

$$\begin{cases} x - 4 = -2s + t & \dots\dots ① \\ y = 3s + 3t & \dots\dots ② \\ -2 = s - 2t & \dots\dots ③ \end{cases}$$

が得られる。②と③より、

$$s = \frac{2y - 6}{9}, t = \frac{y + 6}{9}$$

であるから、①に代入して x と y の関係式、

$$\begin{aligned} x - 4 &= -2 \cdot \frac{2y - 6}{9} + \frac{y + 6}{9} \\ \Leftrightarrow y &= -3x + 18 \end{aligned}$$

が得られる。

(答) $y = -3x + 18$

(4)

直線APと直線BCが直交するから、 $\overrightarrow{AP}$ と $\overrightarrow{BC}$ も直交する、すなわち内積 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BC}$ の値は0となる。ここで、内積 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ を計算すると、 $\overrightarrow{BC} = (3, 0, -3)$ であるから、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BC} &= 0 \\ \Leftrightarrow (x - 4) \cdot 3 + y \cdot 0 + (-2) \cdot (-3) &= 0 \\ \Leftrightarrow 3x - 6 &= 0 \\ \therefore x &= 2 \end{aligned}$$

と得られる。さらに、(3)より $y = -3x + 18$ を満たすから、 $y = 12$ と求められる。したがって、求める座標は $P(2, 12, 0)$ となる。

(答) $P(2, 12, 0)$

3

(1)

問題文より,

$$\begin{aligned} S_6 &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 \\ &= \cos 0 + 2 \cos \frac{\pi}{3} + 2^2 \cos \frac{2}{3} \pi + 2^3 \cos \pi + 2^4 \cos \frac{4}{3} \pi + 2^5 \cos \frac{5}{3} \pi \\ &= 1 + 2 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 8 \cdot (-1) + 16 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 32 \cdot \frac{1}{2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

である。

(答) $S_6 = 0$

(2)

まず, 自然数 k に対して $a_{3k-2}, a_{3k-1}, a_{3k}$ の値を考えると,

$$\left\{ \begin{aligned} a_{3k-2} &= 2^{3k-3} \cos \frac{(3k-3)\pi}{3} = 2^{3k-3} \cos(k-1)\pi = 2^{3k-3} \cdot (-1)^{k-1} \\ a_{3k-1} &= 2^{3k-2} \cos \frac{(3k-2)\pi}{3} \\ &= 2^{3k-2} \cos \left\{ (k-1)\pi + \frac{\pi}{3} \right\} \\ &= 2^{3k-2} \cdot (-1)^{k-1} \cdot \frac{1}{2} \\ &= 2^{3k-3} \cdot (-1)^{k-1} \\ a_{3k} &= 2^{3k-1} \cos \frac{(3k-1)\pi}{3} \\ &= 2^{3k-1} \cos \left\{ (k-1)\pi + \frac{2}{3}\pi \right\} \\ &= 2^{3k-1} \cdot (-1)^{k-1} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \\ &= -2^{3k-2} \cdot (-1)^{k-1} \end{aligned} \right.$$

となるから,

$$a_{3k-2} + a_{3k-1} + a_{3k} = 0$$

である。さらに, 自然数 l に対して $S_{3l-2}, S_{3l-1}, S_{3l}$ の値を考えると, $l \geq 2$ のとき,

$$\left\{ \begin{aligned} S_{3l-2} &= \sum_{m=1}^{l-1} (a_{3m-2} + a_{3m-1} + a_{3m}) + a_{3l-2} = a_{3l-2} = 2^{3l-3} \cdot (-1)^{l-1} \\ S_{3l-1} &= \sum_{m=1}^{l-1} (a_{3m-2} + a_{3m-1} + a_{3m}) + a_{3l-2} + a_{3l-1} = a_{3l-2} + a_{3l-1} = 2^{3l-2} \cdot (-1)^{l-1} \\ S_{3l} &= \sum_{m=1}^l (a_{3m-2} + a_{3m-1} + a_{3m}) = 0 \end{aligned} \right.$$

となる。これは, $l=1$ のときも成り立つ。したがって, S_{50} の値は, $50=3 \cdot 17-1$ であるから,

$$S_{50} = S_{3 \cdot 17-1} = 2^{3 \cdot 17-2} \cdot (-1)^{17-1} = 2^{49}$$

となる。

(答) $S_{50} = 2^{49}$

(3)

(2)より, n の値によって場合分けを行う。

[1] $n=3l-2$ のとき

条件より,

$$\begin{aligned} |S_{3l-2}| &\geq 10^{50} \\ \Leftrightarrow \left| 2^{3l-3} \cdot (-1)^{l-1} \right| &\geq 10^{50} \\ \Leftrightarrow 2^{3l-3} &\geq 10^{50} \end{aligned}$$

となるから, 両辺の常用対数をとると,

$$\begin{aligned} (3l-3) \log_{10} 2 &\geq 50 \\ \Leftrightarrow l &\geq \frac{50}{3 \log_{10} 2} + 1 = 56.3 \dots \quad (\log_{10} 2 = 0.3010) \end{aligned}$$

となる。したがって, 条件を満たす最小の自然数 l は 57 であり, このとき $n=169$ である。

[2] $n=3l-1$ のとき

条件より,

$$\begin{aligned} |S_{3l-1}| &\geq 10^{50} \\ \Leftrightarrow \left| 2^{3l-2} \cdot (-1)^{l-1} \right| &\geq 10^{50} \\ \Leftrightarrow 2^{3l-2} &\geq 10^{50} \end{aligned}$$

となるから, 両辺の常用対数をとると,

$$\begin{aligned} (3l-2) \log_{10} 2 &\geq 50 \\ \Leftrightarrow l &\geq \frac{50}{3 \log_{10} 2} + \frac{2}{3} = 56.03 \dots \quad (\log_{10} 2 = 0.3010) \end{aligned}$$

となる。したがって, 条件を満たす最小の自然数 l は 57 であり, このとき $n=170$ である。

[3] $n=3l$ のとき

$S_{3l}=0$ より, 条件を満たす自然数 l は存在しない。

以上, [1], [2], [3]より $|S_n| \geq 10^{50}$ となる最小の n は $n=169$ である。

(答) $n=169$

(1)

すべての金貨および銀貨を区別しないで考えると、硬貨の並べ方は全部で $\frac{9!}{6!3!} = 84$ 通りであり、これは同様に確からしい。いま、金貨の連を G、銀貨の連を S とおくと、連の個数が 5 となるような並べ方は、

(ア) GSGSG または (イ) SGS GS

の 2 通りである。

[1] (ア) GSGSG のとき

まず、3 枚の銀貨を 1 枚と 2 枚の 2 つの連に分ける。次に、金貨 6 枚を一行に並べて、金貨と金貨の 5 つの間に銀貨の連を 1 つずつ入れるという操作を考えると、その並び方は GSGSG であり、銀貨の組の順番も考慮することで ${}_5C_2 \cdot 2! = 20$ 通りとなる。したがって、GSGSG となるような確率は、

$$\frac{20}{84} = \frac{5}{21}$$

である。

[2] (イ) SGS GS のとき

金貨 6 枚を一行に並べて、その端に銀貨を 1 枚ずつおき、金貨と金貨の 5 つの間に銀貨を 1 枚入れるという操作を考えると、その並び方は SGS GS であり、 ${}_5C_1 = 5$ 通りとなる。したがって、SGS GS となるような確率は、

$$\frac{5}{84}$$

である。

以上、[1], [2] より (ア) と (イ) は互いに排反であるから、求める確率は、

$$\frac{5}{21} + \frac{5}{84} = \frac{25}{84}$$

である。

(答) $\frac{25}{84}$

(2)

k は偶数であるから、 $k = 2l$ ($1 \leq l \leq n$) とおく。すべての金貨および銀貨を区別しないで考えると、硬貨の並べ方は全部で $\frac{2n!}{n!n!} = {}_{2n}C_n$ 通りであり、これは同様に確からしい。連の個数が偶数となるような並べ方は、

(ウ) GSGS...GS または (エ) SGSG...SG

の 2 通りである。

[1] (ウ) GSGS...GS のとき

G も S も両方 l 個である。まず、 n 枚の一行に並んだ銀貨を l 個の連に分けると、その分け方は順番を考慮すると ${}_{n-1}C_{l-1} = {}_{n-1}C_{\frac{k}{2}-1}$ 通りである。次に、金貨 n 枚を一行に並べて、最後の端に 1 つ S をおき、金貨と金貨の $n-1$ 個の間から $l-1$ 個選んで銀貨の組をそのまま 1 組ずつ順番を変えずに入れるという操作を考えると、その並び方は ${}_{n-1}C_{l-1} = {}_{n-1}C_{\frac{k}{2}-1}$ 通りとなる。したがって、GSGS...GS となるような確率は、

$$\frac{{}_{n-1}C_{\frac{k}{2}-1} \cdot {}_{n-1}C_{\frac{k}{2}-1}}{{}_{2n}C_n} = \frac{\left({}_{n-1}C_{\frac{k}{2}-1}\right)^2}{{}_{2n}C_n}$$

である。

[2] (エ) SGSG...SG のとき

(ウ) の場合を逆向きにすればよいから、同様に SGSG...SG となる確率は、

$$\frac{{}_{n-1}C_{\frac{k}{2}-1} \cdot {}_{n-1}C_{\frac{k}{2}-1}}{{}_{2n}C_n} = \frac{\left({}_{n-1}C_{\frac{k}{2}-1}\right)^2}{{}_{2n}C_n}$$

である。

以上、[1], [2] より (ウ) と (エ) は互いに排反であるから、求める確率は、

$$\frac{\left({}_{n-1}C_{\frac{k}{2}-1}\right)^2}{{}_{2n}C_n} + \frac{\left({}_{n-1}C_{\frac{k}{2}-1}\right)^2}{{}_{2n}C_n} = \frac{2\left({}_{n-1}C_{\frac{k}{2}-1}\right)^2}{{}_{2n}C_n}$$

である。

(答) $\frac{2\left({}_{n-1}C_{\frac{k}{2}-1}\right)^2}{{}_{2n}C_n}$