

1

(1)

$D(x_1, y_1, 0)$ とする。点Dは2点A, Bを通る直線状にあるから、実数 k を用いて、

$$\overrightarrow{AD} = k\overrightarrow{AB}$$

とおける。よって、

$$\overrightarrow{AD} = k\overrightarrow{AB}$$

$$\Leftrightarrow (x_1 - 4, y_1, -2) = k(-2, 3, 1)$$

$$\Leftrightarrow x_1 - 4 = -2k, y_1 = 3k, -2 = k$$

$$\therefore k = -2, x_1 = 8, y_1 = -6$$

となる。したがって、 $D(8, -6, 0)$ と分かる。

(答) $(8, -6, 0)$

(2)

点Pが三角形ABCを含む平面上にあるから、Pは、実数 s, t を用いて、

$$\overrightarrow{AP} = s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC}$$

とおける。これより、

$$\overrightarrow{AP} = s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC}$$

$$\Leftrightarrow (x - 4, y, -1) = s(-2, 3, 1) + t(1, 3, -2)$$

$$\Leftrightarrow (x - 4, y, -1) = (-2s + t, 3s + 3t, s - 2t)$$

となるから、要素を比較して、

$$\begin{cases} x - 4 = -2s + t & \cdots \textcircled{1} \\ y = 3s + 3t & \cdots \textcircled{2} \\ -2 = s - 2t & \cdots \textcircled{3} \end{cases}$$

①と③より、 s を消去して、

$$x - 8 = -3t \quad \cdots \textcircled{4}$$

②と③より、 s を消去して、

$$y + 6 = 9t \quad \cdots \textcircled{5}$$

④と⑤より、 t を消去して、

$$3x + y - 18 = 0$$

が得られる。

(答) $3x + y - 18 = 0$

(3)

条件より、

$$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$$

となればよい。

$$\overrightarrow{BC} = (3, 0, -3)$$

であるから、

$$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 4, y, -2) \cdot (3, 0, -3) = 0$$

$$\Leftrightarrow 3(x - 4) + 6 = 0$$

$$\therefore x = 2$$

となる。これを、(2)で得られた $3x + y - 18 = 0$ に代入すると、 $y = 12$ となるので、点Pの座標は、

$$P(2, 12, 0)$$

である。

(答) $(2, 12, 0)$

(1)

Z が $p+q$ と pq のみで表せるよう、式を変形していくと、

$$\begin{aligned} Z &= 3(p^4 + q^4) + 4pq(p^2 + q^2) + 2p^2q^2 \\ &= 3\{(p+q)^4 - 4pq(p^2 + q^2) - 6p^2q^2\} + 4pq(p^2 + q^2) + 2p^2q^2 \\ &= 3(p+q)^4 - 8pq(p^2 + q^2) - 16p^2q^2 \\ &= 3(p+q)^4 - 8pq\{(p+q)^2 - 2pq\} - 16p^2q^2 \\ &= 3(p+q)^4 - 8pq(p+q)^2 \end{aligned}$$

となる。ここに、 $p+q=a$ 、 $pq=b$ を入れて、整理すると、

$$\begin{aligned} Z &= 3a^4 - 8a^2b \\ &= a^2(3a^2 - 8b) \end{aligned}$$

が得られる。

$$(\text{答}) \quad Z = a^2(3a^2 - 8b)$$

(2)

p, q は自然数であるから、 $a = p+q \geq 2$ 、 $b = pq \geq 1$ である。これより、 $a^2 = 3^2, 11^2, 33^2$ のいずれかに絞られる。

(i) $a^2 = 3^2$ の場合

$$3a^2 - 8b = 11^2 \times 19 \text{ となり、この時、} b = -284 < 0 \text{ となるので不適。}$$

(ii) $a^2 = 11^2$ の場合

$$3a^2 - 8b = 3^2 \times 19 \text{ となり、この時、} b = 24 \text{ となる。}$$

(iii) $a^2 = 33^2$ の場合

$$3a^2 - 8b = 19 \text{ となり、この時、} b = 406 \text{ となる。}$$

(ii) のとき、 $a=11, b=24$ であり、 p, q は二次方程式 $t^2 - at + b = 0$ の2解であるから、これを解いて、 $(p, q) = (3, 8), (8, 3)$ のいずれかとなる。

(iii) のとき、 $a=33, b=406$ となるが、二次方程式 $t^2 - at + b = 0$ について、判別式

$$D = 33^2 - 4 \cdot 406 = -535 < 0 \text{ となり、実数解が存在しないため、不適。}$$

したがって、 $(p, q) = (3, 8), (8, 3)$ がすべてであるとわかる。

$$(\text{答}) \quad (p, q) = (3, 8), (8, 3)$$

3

(1)

$$f(x)=\frac{\log x^2}{x^2}=\frac{2\log x}{x^2}$$

であるから、

$$\begin{aligned}f'(x) &= 2 \cdot \frac{\frac{1}{x} \cdot x^2 - (\log x) \cdot 2x}{x^4} \\ &= \frac{2(1-2\log x)}{x^3}\end{aligned}$$

となり、

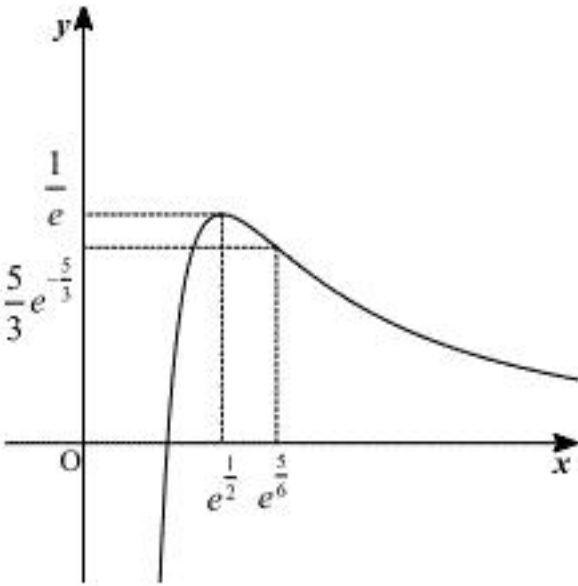
$$\begin{aligned}f''(x) &= 2 \cdot \frac{-\frac{2}{x^2} \cdot x^3 - (1-2\log x) \cdot 3x^2}{x^6} \\ &= \frac{2(6\log x - 5)}{x^4}\end{aligned}$$

となる。これより、増減表は次のようになる。

x	0	...	$\frac{1}{e^2}$	...	$\frac{5}{e^6}$	...
$f'(x)$		+	0	-		-
$f''(x)$		-		-	0	+
$f(x)$		↗	$\frac{1}{e}$	↘	$\frac{5}{3}e^{-\frac{5}{3}}$	↘

極大値は $f\left(\frac{1}{e^2}\right)=\frac{1}{e}$ 、変曲点は $\left(\frac{5}{e^6}, f\left(\frac{5}{e^6}\right)\right)=\left(\frac{5}{e^6}, \frac{5}{3}e^{-\frac{5}{3}}\right)$ となる。また、 $\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = -\infty$ 、

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ であるから、グラフは次のようになる。



(答) 前図

(2)

$g'(x)=2kx$ であり、共有点で接線が一致することから、 $f(p)=g(p)$ かつ $f'(p)=g'(p)$ であるので、

$$\begin{cases} \frac{2\log p}{p^2} = kp^2 & \cdots \textcircled{1} \\ \frac{2(1-2\log p)}{p^3} = 2kp & \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

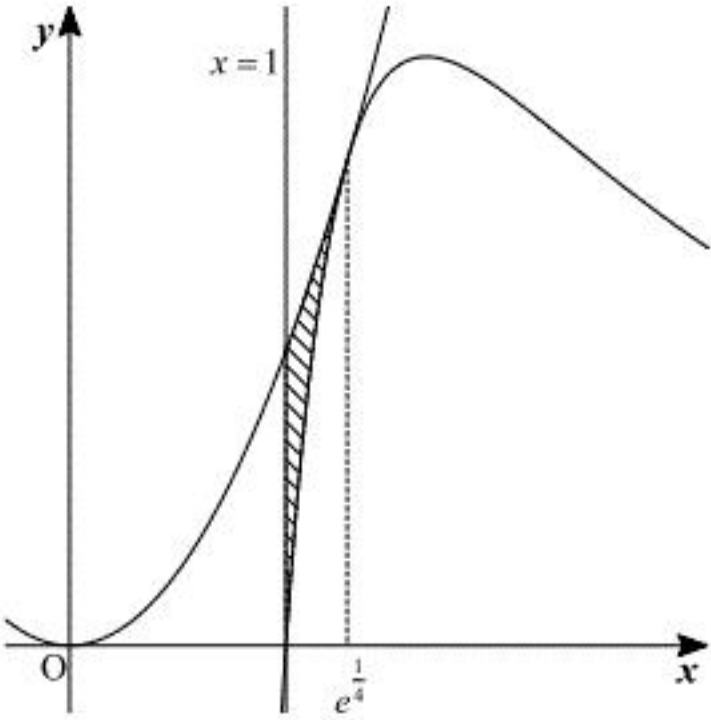
が成り立つ。 $\textcircled{1}$ 、 $\textcircled{2}$ を連立して整理すると、 $\log p = \frac{1}{4}$ が得られるので、 $p = e^{\frac{1}{4}}$ となる。また、こ

のとき、 $k = \frac{1}{2e}$ も得られる。

(答) $p = e^{\frac{1}{4}}$

(3)

(2)より、 $k = \frac{1}{2e}$ であるから、求める面積は、図の斜線部になる。



これより、求める面積 S は、

$$\begin{aligned}S &= \int_1^{e^{\frac{1}{4}}} \{g(x) - f(x)\} dx \\ &= \int_1^{e^{\frac{1}{4}}} \left(\frac{1}{2e} x^2 - \frac{2\log x}{x^2} \right) dx\end{aligned}$$

となる。ここで、 C を積分定数として、

$$\begin{aligned}\int \frac{\log x}{x^2} dx &= \int \left(-\frac{1}{x} \right)' \cdot \log x dx \\ &= -\frac{1}{x} \log x - \int \left(-\frac{1}{x} \right) \cdot (\log x)' dx \\ &= -\frac{1}{x} \log x + \int \frac{1}{x^2} dx \\ &= -\frac{1}{x} \log x - \frac{1}{x} + C \\ &= -\frac{1}{x} (\log x + 1) + C\end{aligned}$$

となるから、 S は、

$$\begin{aligned}S &= \int_1^{e^{\frac{1}{4}}} \left(\frac{1}{2e} x^2 - \frac{2\log x}{x^2} \right) dx \\ &= \left[\frac{1}{6e} x^3 + \frac{2}{x} (\log x + 1) \right]_1^{e^{\frac{1}{4}}} \\ &= \frac{8}{3} e^{-\frac{1}{4}} - \frac{1}{6} e^{-1} - 2\end{aligned}$$

となる。

(答) $S = \frac{8}{3} e^{-\frac{1}{4}} - \frac{1}{6} e^{-1} - 2$

4

(1)

$$a_1 = 2^0 \cos 0 = 1$$

$$a_2 = 2^1 \cos \frac{1}{3}\pi = 1$$

$$a_3 = 2^2 \cos \frac{2}{3}\pi = -2$$

$$a_4 = 2^3 \cos \pi = -8$$

$$a_5 = 2^4 \cos \frac{4}{3}\pi = -8$$

$$a_6 = 2^5 \cos \frac{5}{3}\pi = 16$$

となるので,

$$\begin{aligned} S_6 &= 1+1-2-8-8+16 \\ &= 0 \end{aligned}$$

が得られる。

(答) $S_6 = 0$

(2)

k を自然数として,

$$a_{6k-5} = 2^{6k-6} \cos 2(k-1)\pi = 2^{6k-6}$$

$$a_{6k-4} = 2^{6k-5} \cos \left\{ 2k - \frac{5}{3} \right\} \pi = 2^{6k-6}$$

$$a_{6k-3} = 2^{6k-4} \cos \left\{ 2k - \frac{4}{3} \right\} \pi = -2^{6k-5}$$

$$a_{6k-2} = 2^{6k-3} \cos \{ 2k - 1 \} \pi = -2^{6k-3}$$

$$a_{6k-1} = 2^{6k-2} \cos \left\{ 2k - \frac{2}{3} \right\} \pi = -2^{6k-3}$$

$$a_{6k} = 2^{6k-1} \cos \left\{ 2k - \frac{1}{3} \right\} \pi = 2^{6k-2}$$

であるから, a_{6k-5} から a_{6k} までを足し合わせた数を T_k とすると,

$$\begin{aligned} T_k &= 2^{6k-6} + 2^{6k-6} - 2^{6k-5} - 2^{6k-3} - 2^{6k-3} + 2^{6k-2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

となる。これより,

$$\begin{aligned} S_{50} &= \sum_{j=1}^8 T_j + a_{49} + a_{50} \\ &= 0 + a_{6 \times 9 - 3} + a_{6 \times 9 - 4} \\ &= 2^{48} + 2^{48} \\ &= 2^{49} \end{aligned}$$

となる。

(答) $S_{50} = 2^{49}$

(3)

(2)より, m を自然数として,

(i) $n = 6m - 5, 6m - 2$ のとき,

$$|S_n| = 2^{n-1}$$

(ii) $n = 6m - 4, 6m - 1$ のとき,

$$|S_n| = 2^{n-1}$$

(iii) $n = 6m - 3, 6m$ のとき,

$$|S_n| = 0$$

よって, (iii) の場合を除き, $|S_n| = 2^{n-1}$ であるから, $|S_n| = 2^{n-1} \geq 10^{50}$ において, 常用対数をとると,

$$(n-1) \log_{10} 2 \geq 50$$

$$\Leftrightarrow n \geq \frac{50}{\log_{10} 2} + 1 = 167.1 \dots$$

となる。これを満たす最小の n は, $n = 168$ であるが, $168 = 6 \times 28$ であり, $S_n = 0$ となることから, 条件を満たさない。したがって, 求める n は, $n = 169$ となる。

(答) $n = 169$