

1.

(1)

自然数 n に対して $f_n(x) = e^x - \frac{x^n}{n!}$ とおき、数学的帰納法を利用して、任意の自然数 n について $x > 0$ のとき $f_n(x) > 0$ であることを示す。

[1] $n=1$ のとき

$f_1(x) = e^x - x$ であり、 $f_1'(x) = e^x - 1$ である。 e^x は実数全体において単調に増加する関数

であり、 $x > 0$ の時 $e^x > e^0 = 1 \Leftrightarrow e^x - 1 > 0$ である。よって $x > 0$ において $f_1'(x) > 0$ であり、

$f_1(x)$ は $x > 0$ において単調に増加する関数である。これと、 $f_1(0) = 1 > 0$ より、 $x > 0$ において $f_1(x) > 0$ である。よって $n=1$ のときは $x > 0$ において $f_n(x) > 0$ が成り立つ。

[2] $n=k$ で成り立つとき

$x > 0$ のとき $f_k(x) > 0$ であると仮定する。ここで $n=k+1$ の場合を考えると、

$f_{k+1}(x) = e^x - \frac{x^{k+1}}{(k+1)!}$ であり、 $f_{k+1}'(x) = e^x - \frac{x^k}{k!} = f_k(x)$ である。よって仮定より、 $x > 0$ にお

いて $f_{k+1}'(x) > 0$ であり、 $f_{k+1}(x)$ は $x > 0$ において単調に増加する関数である。これと、

$f_{k+1}(0) = 1 > 0$ より、 $x > 0$ において $f_{k+1}(x) > 0$ である。よって $n=k+1$ のときも $x > 0$ において $f_n(x) > 0$ が成り立つ。

以上[1],[2]より、正の実数 x について、任意の自然数 n に対し $f_n(x) = e^x - \frac{x^n}{n!} > 0$ 、すなわち

$e^x > \frac{x^n}{n!}$ が成り立つことが示された。

(証明終)

(2)

実数 a に対して $a < m$ を満たすような自然数 m を考える。このような m は任意の実数 a に対して存在する。(1)の結果より、正の実数 x 、自然数 m に対し

$$e^x > \frac{x^m}{m!}$$

が成り立つ。両辺はともに正であるから、逆数を考えると、

$$0 < \frac{1}{e^x} < \frac{m!}{x^m}$$

となる。さらに、 $x > 0$ より $x^a > 0$ であるから、各辺に x^a をかけると、

$$0 < \frac{x^a}{e^x} < \frac{m!}{x^{m-a}}$$

となる。 $a < m$ より $m-a > 0$ であるから、 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{m!}{x^{m-a}} = 0$ であり、はさみうちの原理より

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^a}{e^x} = 0$ である。

(答) 0

(3)

$x > 0$ であるから、実数 t を $t = -b \log x$ とおくことができる。 $b > 0$ であるから、 $x \rightarrow +0$ のとき、

$t \rightarrow \infty$ である。このとき、 $\log x = -\frac{t}{b}$ 、 $x = e^{-\frac{t}{b}}$ であるから、

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +0} x^b \log x &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(e^{-\frac{t}{b}} \right)^b \cdot \left(-\frac{t}{b} \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-t} \cdot \left(-\frac{t}{b} \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{b} \right) \cdot \frac{t}{e^t} \end{aligned}$$

である。(2)で示した式において、 $a=1$ の場合を考えると、 $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t}{e^t} = 0$ であるから、

$\lim_{x \rightarrow +0} x^b \log x = 0$ である。

(答) 0

2.
(1)

$f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ のとき, $f'(x) = \frac{e^x + (-e^{-x})}{2} = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ であるから,

$$\begin{aligned}\{f(x)\}^2 - \{f'(x)\}^2 &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 \\ &= \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4} \\ &= 1\end{aligned}$$

となり, 関係式(i)が示された。また,

$$f''(x) = \{f'(x)\}' = \frac{e^x - (-e^{-x})}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = f(x)$$

となり, 関係式(ii)が示された。

(証明終)

(2)

曲線の長さ L は, $L = \int_0^a \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2} dx$ と表される。ここで, (1)で示した関係式(i)を変形する

と, $\{f(x)\}^2 = 1 + \{f'(x)\}^2$ であり, また $e^x > 0, e^{-x} > 0$ より $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} > 0$ であるから,

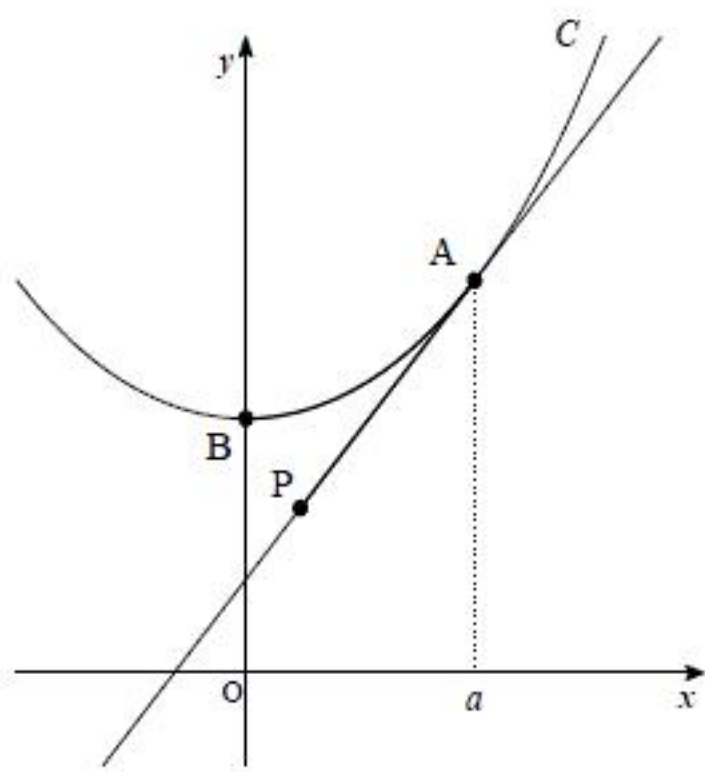
$\sqrt{1 + \{f'(x)\}^2} = f(x)$ となる。よって,

$$\begin{aligned}L &= \int_0^a f(x) dx \\ &= \int_0^a \frac{e^x + e^{-x}}{2} dx \\ &= \left[\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right]_0^a \\ &= \frac{e^a - e^{-a}}{2} - \frac{1-1}{2} \\ &= \frac{e^a - e^{-a}}{2}\end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad L = \frac{e^a - e^{-a}}{2}$$

(3)



曲線 $C: y = f(x)$ の点 $A(a, f(a))$ における接線の方程式は $y = f'(a)(x-a) + f(a)$ である。点 P はこの接線上にあるから,

$$Y = f'(a)(X-a) + f(a)$$

を満たし, 点 P の座標は, $(X, f'(a)(X-a) + f(a))$ とおける。よって,

$$\begin{aligned}AP^2 &= (X-a)^2 + \{f'(a)(X-a) + f(a) - f(a)\}^2 \\ &= (X-a)^2 [1 + \{f'(a)\}^2]\end{aligned}$$

であり, (2)で示したように, $1 + \{f'(x)\}^2 = \{f(x)\}^2$ だから, $AP^2 = (X-a)^2 \{f(a)\}^2$ である。 $X \leq a$ より, $X-a \leq 0$ に注意すると, 結局 $AP = (a-X)f(a)$ である。

ここで, (2)の結果より $L = \frac{e^a - e^{-a}}{2}$ であり, さらに(1)で示したように, $f'(a) = \frac{e^a - e^{-a}}{2}$ であるから, $L = f'(a)$ である。(2)で示したように $f(a) > 0$ だから, AP の長さが L に等しいとき,

$$\begin{aligned}(a-X)f(a) &= f'(a) \\ \Leftrightarrow X &= a - \frac{f'(a)}{f(a)}\end{aligned}$$

より,

$$\begin{aligned}X &= a - \frac{e^a - e^{-a}}{2} \cdot \frac{2}{e^a + e^{-a}} \\ &= a - \frac{e^a - e^{-a}}{e^a + e^{-a}}\end{aligned}$$

である。さらに上式より $X-a = -\frac{f'(a)}{f(a)}$ であり, (1)で示した条件式(i) $\{f(x)\}^2 - \{f'(x)\}^2 = 1$

より,

$$\begin{aligned}Y &= f'(a)(X-a) + f(a) \\ &= f'(a) \cdot \left\{ -\frac{f'(a)}{f(a)} \right\} + f(a) \\ &= \frac{\{f(a)\}^2 - \{f'(a)\}^2}{f(a)} \\ &= \frac{1}{f(a)} \\ &= \frac{2}{e^a + e^{-a}}\end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad (X, Y) = \left(a - \frac{e^a - e^{-a}}{e^a + e^{-a}}, \frac{2}{e^a + e^{-a}} \right)$$

(4)

まず, 曲線 C の点 A における接線の傾きを m_1 とすると, $m_1 = f'(a)$ である。

次に, (3)の結果及び途中式より $(X, Y) = \left(a - \frac{f'(a)}{f(a)}, \frac{1}{f(a)} \right)$ であり, 曲線 D は $t \geq 0$ を満たす

媒介変数 t を用いて $(x, y) = \left(t - \frac{f'(t)}{f(t)}, \frac{1}{f(t)} \right)$ と表せる。(1)で示した関係式(ii) $f''(x) = f(x)$ を

用いると

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= 1 - \frac{f''(t)f(t) - f'(t)f'(t)}{\{f(t)\}^2} \\ &= 1 - \frac{\{f(t)\}^2 - \{f'(t)\}^2}{\{f(t)\}^2} \\ &= \frac{\{f'(t)\}^2}{\{f(t)\}^2}\end{aligned}$$

であり, また

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{f'(t)}{\{f(t)\}^2}$$

である。 $t > 0$ のとき $e^t > e^{-t}$ だから, $f'(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2} > 0$ であり, $\frac{dx}{dt} \neq 0$ である。よって $t > 0$ のとき,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f'(t)}{\{f(t)\}^2} \cdot \frac{\{f(t)\}^2}{\{f'(t)\}^2} = -\frac{1}{f'(t)}$$

となる。点 P は曲線 D 上の $t=a$ である点だから, $a > 0$ のとき曲線 D の点 P における接線の

傾きを m_2 とすると, $m_2 = -\frac{1}{f'(a)}$ である。

以上より, $m_1 m_2 = f'(a) \cdot \left\{ -\frac{1}{f'(a)} \right\} = -1$ であり, $a > 0$ のとき曲線 C の点 A における接線と曲線 D の点 P における接線は常に直交する。

(証明終)

3.

(1)

勝つまでにサイコロを振る回数を a とおき、 $n=4$ の場合に勝つようなサイコロの目の出方を a の値による場合分けで考える。

[1] $a=1$ のとき

サイコロの目が4であればよい。この確率は $\frac{1}{6}$ である。

[2] $a=2$ のとき

サイコロの目が1, 3または2, 2または3, 1の順に出ればよい。それぞれの順番に目が出る

確率はいずれも $\left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{6^2}$ だから、 $a=2$ で勝つ確率は $3 \cdot \frac{1}{6^2} = \frac{3}{6^2}$ である。

[3] $a=3$ のとき

サイコロの目が2, 1, 1または1, 2, 1または1, 1, 2の順に出ればよい。それぞれの順番に目が

出る確率はいずれも $\left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{1}{6^3}$ だから、 $a=3$ で勝つ確率は $3 \cdot \frac{1}{6^3} = \frac{3}{6^3}$ である。

[4] $a=4$ のとき

サイコロの目が4回とも1であればよい。この確率は $\left(\frac{1}{6}\right)^4 = \frac{1}{6^4}$ である。

$n=4$ のときに $a>4$ で勝つことはないので、[1], [2], [3], [4]より求める確率は

$$\frac{1}{6} + \frac{3}{6^2} + \frac{3}{6^3} + \frac{1}{6^4} = \frac{6^3 + 3 \cdot 6^2 + 3 \cdot 6 + 1}{6^4} = \frac{216 + 108 + 18 + 1}{1296} = \frac{343}{1296}$$

である。

(答) $\frac{343}{1296}$

(2)

5回振ったときのサイコロの目を1回目から順に x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 とおき、

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 10 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$1 \leq x_i \leq 6 \quad (i=1, 2, 3, 4, 5) \quad \cdots \textcircled{2}$$

の両方を満たす整数の組 $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ を考える。ここで、新たに、

$$1 \leq x_i \quad (i=1, 2, 3, 4, 5) \quad \cdots \textcircled{3}$$

といった条件を考え、①、③の両方を満たす整数の組 $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ を考える。このような組の総数は、1列に並べられた10個のボールに対し、ボール同士に挟まれてできる9つの領域のいずれか4箇所に仕切りを置く方法の総数に等しい。このとき、4つの仕切りによってボールは5つの組にわけられ、その各組のボールの数が x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 に対応する。よって①、③の両方を満たす整数の組 $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ の数は、

$${}_9C_4 = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 126$$

である。ここで、①、③の両方が満たされているとき、

$$x_1 = 10 - x_2 - x_3 - x_4 - x_5 \leq 10 - 1 - 1 - 1 - 1 = 6$$

であり、同様にして $x_i \leq 6 \quad (i=2, 3, 4, 5)$ が示される。よって①、③の両方が成り立つならば①、②の両方が成り立ち、その逆も明らかに成り立つ。ゆえに①、③の両方が成り立つことと①、②の両方が成り立つことは同値であり、①、②の両方を満たす整数の組 $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ の数も126である。それぞれの順番に目が出る確率はいずれも $\left(\frac{1}{6}\right)^5 = \frac{1}{6^5}$ であるから、結局求める確率は、

$$126 \cdot \frac{1}{6^5} = \frac{2 \cdot 3^2 \cdot 7}{2^5 \cdot 3^5} = \frac{7}{2^4 \cdot 3^3} = \frac{7}{432}$$

である。

(答) $\frac{7}{432}$

(3)

(2)と同様に、

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 12 \quad \cdots \textcircled{4}$$

$$1 \leq x_i \leq 6 \quad (i=1, 2, 3, 4, 5) \quad \cdots \textcircled{2}$$

の両方を満たす整数の組 $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ を考える。そして、

$$1 \leq x_i \quad (i=1, 2, 3, 4, 5) \quad \cdots \textcircled{3}$$

といった条件を考え、④、③の両方を満たす整数の組 $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ を考える。これについては(2)同様、1列に並べられた12個のボールに対し、ボール同士に挟まれてできる11個の領域のいずれか4箇所に仕切りを置くことを考えればよいので、④、③の両方を満たす整数の組 $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ の数は

$${}_{11}C_4 = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 330$$

である。ここで、④、③の両方を満たす整数の組のうち、②を満たさないものを考える。このとき、 $7 \leq x_i$ が $i=1, 2, 3, 4, 5$ のいずれかにおいて成り立っている。仮に $7 \leq x_1$ であるとする

と、④、③より

$$x_1 = 12 - x_2 - x_3 - x_4 - x_5 \leq 12 - 1 - 1 - 1 - 1 = 8$$

であるから、 $x_1 = 7, 8$ である。

[1] $x_1 = 7$ のとき

④より、 $x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 12 - 7 = 5$ となり、これが成り立つのは x_2, x_3, x_4, x_5 のうち、いずれか1つが2で他がすべて1であるときである。このような (x_2, x_3, x_4, x_5) の組は4つある。

[2] $x_1 = 8$ のとき

④より、 $x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 12 - 8 = 4$ となり、これが成り立つのは x_2, x_3, x_4, x_5 がすべて1である場合ただ1通りである。

[1], [2]で、 $7 \leq x_i$ が $i=2, 3, 4, 5$ の場合に成り立つ場合も考えると、④、③の両方を満たす整数の組のうち、②を満たさないものの個数は $5 \cdot (4+1) = 25$ 個ある。したがって④、③の両方を満たす整数の組 $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ の数は $330 - 25 = 305$ である。それぞれの順番に目が出る確率はいずれも $\left(\frac{1}{6}\right)^5 = \frac{1}{6^5}$ であるから、結局求める確率は、

$$305 \cdot \frac{1}{6^5} = \frac{305}{7776}$$

である。

(答) $\frac{305}{7776}$