

平成 29 年度・入学試験問題

数 学 (医)

注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
2. すべての解答用紙に受験番号を記入しなさい。
3. 答案は解答用紙の各問題番号の欄に記入しなさい。
4. 解答用紙の裏面には何も書いてはいけません。
5. 試験終了後、問題冊子および下書用紙は持ち帰りなさい。

すべての問題について、求める手順をわかりやすく説明すること。

1. 線分 OA, 線分 OB, 線分 AB の長さがそれぞれ $\sqrt{5}$, $\sqrt{8}$, 3 である四面体 OABC に対して, 辺 AB を $s:1-s$ に内分する点を P, 辺 OC を $t:1-t$ に内分する点を Q とする ($0 < s < 1$, $0 < t < 1$)。 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とおく。内積 $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{c} = 0$, $\angle AOC$ が $\frac{\pi}{3}$ であるとき, 次の問いに答えよ。ただし, $\angle OCP$ は鋭角であるとしてよい。

- (1) ベクトル $\overrightarrow{PQ}$ を $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ と s, t で表せ。
- (2) 線分 PQ の長さが最小になるとき, $t = \frac{1}{2}$ であるとする。このとき線分 OC の長さを求めよ。
- (3) (2) の状況のもとで s を求め, 三角形 OPC の面積を求めよ。

2. 袋の中に何枚かの金貨と, 何枚かの銀貨が入っており, これを金貨, 銀貨の別を確認することなく, 1 枚ずつ取り出して, 順に 1 列に並べていく。袋の中の硬貨をすべて取り出して並べ終えたとき, 列の中には, 金貨と銀貨いずれかのみ 1 枚以上からなる部分的な列ができている。これを「連 (れん)」とよぶ。例えば,

金, 金, 金, 銀, 銀, 金, 金, 銀, 金

の列には,

(金, 金, 金), (銀, 銀), (金, 金), (銀), (金)

のように, 5 個の連がある。次の問いに答えよ。ただし, $0! = 1$ とする。

- (1) 金貨が 6 枚, 銀貨が 3 枚のとき, 連の個数が 5 である確率を求めよ。
- (2) 金貨と銀貨が n 枚ずつ ($n \geq 2$) のとき, 連の個数が偶数 k ($2 \leq k \leq 2n$) である確率を n と k の式で表せ。
- (3) 金貨と銀貨が n 枚ずつ ($n \geq 2$) のとき, 連の個数が奇数 ℓ ($3 \leq \ell \leq 2n-1$) である確率を n と ℓ の式で表せ。

3. $x > 0$ の範囲において、 $f(x) = \frac{\log x^2}{x^2}$, $g(x) = kx^2$ ($k > 0$) とおく。

2つの曲線 $y = f(x)$, $y = g(x)$ が共有点を持ち、その共有点におけるそれぞれの接線が一致するとき、共有点の x 座標を p とする。次の問いに答えよ。ただし、対数は自然対数とする。

なお、 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x^2}{x^2} = 0$ であることを証明なしで用いてよい。

(1) 曲線 $y = f(x)$ の増減、極値、グラフの凹凸および変曲点を調べて、そのグラフをかけ。

(2) p の値を求めよ。

(3) 直線 $x = 1$ と 2つの曲線 $y = f(x)$, $y = g(x)$ で囲まれた図形の面積 S を求めよ。

4. 自然数 n に対し、 $a_n = 2^{n-1} \cos \frac{(n-1)\pi}{3}$ で与えられる数列 $\{a_n\}$ を考える。

また、 $\{a_n\}$ の初項 a_1 から第 n 項 a_n までの和を S_n で表す。次の問いに答えよ。

(1) S_{50} を求めよ。

(2) $|S_n| \geq 10^{50}$ となる最小の n の値を求めよ。ただし、 $\log_{10} 2 = 0.3010$ とする。