

平成 29 年度・入学試験問題

数 学 (中)

注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
2. すべての解答用紙に受験番号を記入しなさい。
3. 答案は解答用紙の各問題番号の欄に記入しなさい。
4. 解答用紙の縦の線の右側には、受験番号以外は何も記入してはいけません。
5. 解答用紙の裏面には何も書いてはいけません。
6. 試験終了後、問題冊子および下書用紙は持ち帰りなさい。

1. 正の実数 x について、以下の問いに答えよ。

- (1) 自然数 n に対し、不等式 $e^x > \frac{x^n}{n!}$ が成り立つことを数学的帰納法により証明せよ。
- (2) 前問で示した不等式を用いて極限值 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^a}{e^x}$ を求めよ。ただし、 a は実数の定数である。
- (3) 前問の結果を用いて極限值 $\lim_{x \rightarrow +0} x^b \log x$ を求めよ。ただし、 b は正の定数である。

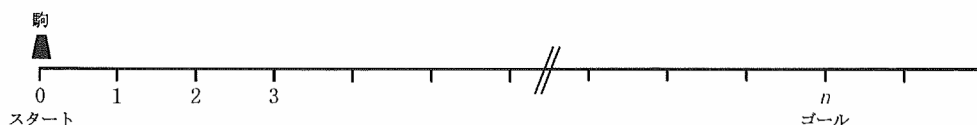
2. xy 平面上の曲線 $C: y = f(x)$ に関し、以下の問いに答えよ。ただし、

$$f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

である。

- (1) $f(x)$ は以下の関係式を満たすことを示せ。
 - (i) $\{f(x)\}^2 - \{f'(x)\}^2 = 1$
 - (ii) $f''(x) = f(x)$ただし、 $f'(x)$ および $f''(x)$ は、それぞれ、 $f(x)$ の x に関する 1 階および 2 階の導関数を表す。
- (2) 曲線 C 上の点 $A(a, f(a))$ と点 $B(0, f(0))$ の間の曲線の長さ L を求めよ。ただし、 a は $a \geq 0$ を満たす定数である。
- (3) 点 A における曲線 C の接線上に点 $P(X, Y)$ を AP の距離が L に等しくなるようにとる。ただし、 $X \leq a$ とする。このとき、 X および Y を、 a を用いて表せ。
- (4) 点 A を動かしたときに点 P の描く曲線を D とする。 $a > 0$ のとき、曲線 C の点 A における接線と曲線 D の点 P における接線は常に直交することを示せ。

3. サイコロを繰り返し振って、出た目の数だけ駒を右に進め、駒がゴールちょうどに着いたら勝ち、通り過ぎたら負けとするゲームを行う。ゲーム盤は下図のような数直線からできており、ゲームは0からスタートし、ゴールを n とする。また、1から6までの目があるサイコロを使う。以下の問いに答えよ。



- (1) $n = 4$ の場合の勝つ確率を求めよ。
- (2) $n = 10$ の場合、サイコロを振ってちょうど5回目に勝つ確率を求めよ。
- (3) $n = 12$ の場合、サイコロを振ってちょうど5回目に勝つ確率を求めよ。