

(1)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{EC} &= \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} \\ &= \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{EH}\end{aligned}$$

である。点Jは線分CE上の点であるから実数 j を用いて、

$$\overrightarrow{EJ} = j\overrightarrow{EC} = j\overrightarrow{EA} + j\overrightarrow{EF} + j\overrightarrow{EH}$$

と表せる。また点Jは三角形AFH上の点であるから、

$$\begin{aligned}j + j + j &= 1 \\ \Leftrightarrow j &= \frac{1}{3}\end{aligned}$$

となる。よって $\overrightarrow{EJ} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{EH})$ となるから点Jは三角形AFHの重心である。

(証明終)

(2)

点Kは線分CE上の点であるから実数 k を用いて、

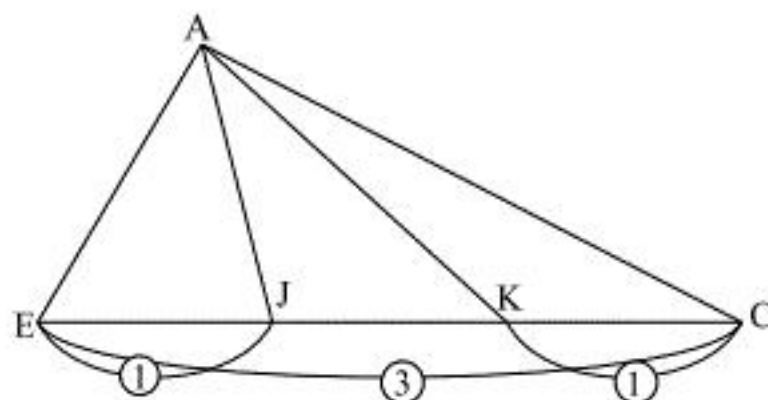
$$\overrightarrow{CK} = k\overrightarrow{CE} = k\overrightarrow{CB} + k\overrightarrow{CD} + k\overrightarrow{CG}$$

と表せる。また点Kは三角形BDG上の点であるから、

$$\begin{aligned}k + k + k &= 1 \\ \Leftrightarrow k &= \frac{1}{3}\end{aligned}$$

となる。よって $\overrightarrow{CK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CE}$ となる。また(1)より $\overrightarrow{EJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{EC}$ であるから三角形AECと点J, Kの

位置は下図のようになる。



$EJ:EC = 1:3$, $KC:EC = 1:3$ であるから $EJ:JK:KC = 1:1:1$ であり、上図より三角形 AEJ, AJK, ACK は底辺の長さ、高さがそれぞれ等しい三角形である。したがってこれらの面積は等しい。

(証明終)

(1)

コインを10回投げて x 回 ($x=0, 1, \dots, 10$) 表が出たとする。このとき点Pは左回りに

$$2x + (10 - x) = 10 + x$$

だけ移動する。 $10 + x$ が4で割り切れるとき、点Pは頂点Aの位置にあり、4で割って1余るときは頂点B、2余るときは頂点C、3余るときは頂点Dの位置にある。つまり点Pは $x=2, 6, 10$ のとき頂点A、 $x=3, 7$ のとき頂点B、 $x=0, 4, 8$ のとき頂点C、 $x=1, 5, 9$ のとき頂点Dの位置にある。ここでコインを10回投げて x 回表が出る確率は、

$${}_{10}C_x \left(\frac{1}{2}\right)^x \left(\frac{1}{2}\right)^{10-x} = {}_{10}C_x \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$$

となる。したがって点Pがコインを10回投げて頂点Aに移動する確率は、

$${}_{10}C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^{10} + {}_{10}C_6 \left(\frac{1}{2}\right)^{10} + {}_{10}C_{10} \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = 45 \left(\frac{1}{2}\right)^{10} + 210 \left(\frac{1}{2}\right)^{10} + 1 \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{1}{4}$$

となる。同様にして頂点B, C, Dの位置に移動する確率はそれぞれ

$$\begin{cases} {}_{10}C_3 \left(\frac{1}{2}\right)^{10} + {}_{10}C_7 \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = 120 \left(\frac{1}{2}\right)^{10} + 120 \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{15}{64} \\ {}_{10}C_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{10} + {}_{10}C_4 \left(\frac{1}{2}\right)^{10} + {}_{10}C_8 \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = 1 \left(\frac{1}{2}\right)^{10} + 210 \left(\frac{1}{2}\right)^{10} + 45 \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{1}{4} \\ {}_{10}C_1 \left(\frac{1}{2}\right)^{10} + {}_{10}C_5 \left(\frac{1}{2}\right)^{10} + {}_{10}C_9 \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = 10 \left(\frac{1}{2}\right)^{10} + 252 \left(\frac{1}{2}\right)^{10} + 10 \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{17}{64} \end{cases}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad A: \frac{1}{4}, B: \frac{15}{64}, C: \frac{1}{4}, D: \frac{17}{64}$$

(2)

点Qは最初頂点Cの位置いて、それ以降の移動の仕方は点Pと同じだから、コインを10回投げて点Qが頂点A, B, C, Dの位置にある確率はそれぞれ点Pが頂点C, D, A, Bの位置にある

確率に等しい。つまり点Qがそれぞれの位置にある確率は $A: \frac{1}{4}, B: \frac{17}{64}, C: \frac{1}{4}, D: \frac{15}{64}$ となる。

したがって、点Pと点Qが同じ位置にいる確率は、

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{15}{64} \cdot \frac{17}{64} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{17}{64} \cdot \frac{15}{64} = \frac{511}{2048}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{511}{2048}$$

3

(1)

楕円 O の方程式と直線 l の方程式を連立して y を消去すると、

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{2^2} + \left(\frac{x}{2} + k\right)^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow x^2 + 2kx + 2(k^2 - 1) &= 0\end{aligned}$$

となる。楕円 O と直線 l が 2 点で交わる時、この方程式が異なる 2 つの実数解を持つから、この方程式の判別式を D とおくと異なる 2 つの実数解を持つ条件は、

$$\begin{aligned}\frac{D}{4} &> 0 \\ \Leftrightarrow k^2 - 2(k^2 - 1) &> 0 \\ \Leftrightarrow k^2 &< 2 \\ \Leftrightarrow -\sqrt{2} < k < \sqrt{2}\end{aligned}$$

となる。 $k > 0$ とあわせて求める条件は $0 < k < \sqrt{2}$ となる。

(答) $0 < k < \sqrt{2}$

(2)

$0 < k < \sqrt{2}$ であるとき、(1)で求めた方程式 $x^2 + 2kx + 2(k^2 - 1) = 0$ は異なる 2 つの実数解を持つ。

2 点 A, B の x 座標を α, β とおくと、これが方程式 $x^2 + 2kx + 2(k^2 - 1) = 0$ の 2 解であるから、

解と係数の関係より、

$$\alpha + \beta = -2k, \alpha\beta = 2(k^2 - 1)$$

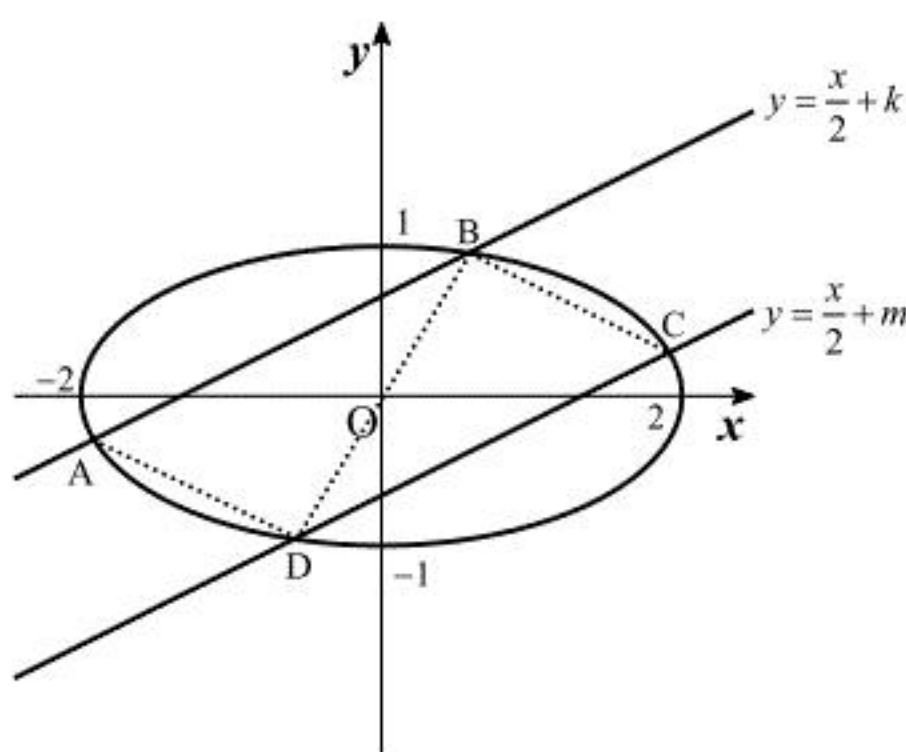
となる。2 点 A, B の座標は $A\left(\alpha, \frac{\alpha}{2} + k\right), B\left(\beta, \frac{\beta}{2} + k\right)$ であるから線分 AB の長さは、

$$\begin{aligned}&\sqrt{(\beta - \alpha)^2 + \left\{\left(\frac{\beta}{2} + k\right) - \left(\frac{\alpha}{2} + k\right)\right\}^2} \\ &= \sqrt{(\beta - \alpha)^2 + \frac{1}{4}(\beta - \alpha)^2} \\ &= \sqrt{\frac{5}{4}(\beta - \alpha)^2} \\ &= \sqrt{\frac{5}{4}\{(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta\}} \\ &= \sqrt{\frac{5}{4}\{(-2k)^2 - 4 \cdot 2(k^2 - 1)\}} \\ &= \sqrt{5(2 - k^2)}\end{aligned}$$

となる。

(答) $\sqrt{5(2 - k^2)}$

(3)



四角形 ABCD が平行四辺形であることより、 $AB \parallel CD$ であるから、直線 CD の方程式は実数

m を用いて $y = \frac{x}{2} + m$ と表せる。(2)と同様にして線分 CD の長さは $\sqrt{5(2 - m^2)}$ となる。四角形

ABCD が平行四辺形であることより $AB = CD$ であるから、 $k \neq m$ とあわせると、

$$\begin{aligned}\sqrt{5(2 - k^2)} &= \sqrt{5(2 - m^2)} \text{ かつ } k \neq m \\ \Leftrightarrow m &= -k\end{aligned}$$

となる。ここで直線 CD と y 軸との交点は $(0, -k)$ であるから、この点と直線 AB との距離は、

$$\frac{0 \cdot \frac{1}{2} + (-1) \cdot (-k) + k}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + (-1)^2}} = \frac{4}{\sqrt{5}}k$$

となる。したがって平行四辺形 ABCD の面積は、

$$\begin{aligned}\sqrt{5(2 - k^2)} \cdot \frac{4}{\sqrt{5}}k &= 4\sqrt{k^2(2 - k^2)} \\ &= 4\sqrt{-(k^2 - 1)^2 + 1}\end{aligned}$$

となり、これは $0 < k < \sqrt{2}$ において、

$$\begin{aligned}k^2 &= 1 \\ \therefore k &= 1\end{aligned}$$

のとき最大となり、その値は 4 である。

(答) $k = 1$ のとき最大値 4

$f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} (x > 0)$ とおく。 $x > 0$ において,

$$f'(x) = -\frac{2}{3x\sqrt[3]{x^2}} < 0$$

となるから $f(x)$ は単調減少である。したがって、 k が自然数、 x が $k < x < k+1$ をみたす実数のとき、

$$f(k) > f(x) > f(k+1)$$

が成り立つ。辺々を k から $k+1$ の間で積分して、

$$\begin{aligned} \int_k^{k+1} f(k) dx &> \int_k^{k+1} f(x) dx > \int_k^{k+1} f(k+1) dx \\ \Leftrightarrow f(k) &> \int_k^{k+1} f(x) dx > f(k+1) \end{aligned}$$

となる。 $n \geq 2$ において、

$$\sum_{k=1}^{n-1} f(k) > \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} f(x) dx > \sum_{k=1}^{n-1} f(k+1)$$

となりここで、

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} f(k) &= \sum_{k=1}^{n-1} a_k \\ &= S_n - a_n \\ &= S_n - \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}} \end{aligned}$$

である。また、

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} f(x) dx &= \int_1^n \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} dx \\ &= \left[3x^{\frac{1}{3}} \right]_1^n \\ &= 3n^{\frac{1}{3}} - 3 \end{aligned}$$

である。また、

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} f(k+1) &= \sum_{k=2}^n a_k \\ &= S_n - a_1 \\ &= S_n - 1 \end{aligned}$$

である。これらより、

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} f(k) &> \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} f(x) dx \\ \Leftrightarrow S_n - \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}} &> 3n^{\frac{1}{3}} - 3 \\ \Leftrightarrow S_n &> 3n^{\frac{1}{3}} - 3 + \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}} \end{aligned}$$

であり、また、

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} f(x) dx &> \sum_{k=1}^{n-1} f(k+1) \\ \Leftrightarrow 3n^{\frac{1}{3}} - 3 &> S_n - 1 \\ \Leftrightarrow S_n &< 3n^{\frac{1}{3}} - 2 \end{aligned}$$

となる。よって、

$$3n^{\frac{1}{3}} - 3 + \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}} < S_n < 3n^{\frac{1}{3}} - 2$$

が成り立つ。 $n = 1000000$ を代入すると、

$$\begin{aligned} 3 \cdot 1000000^{\frac{1}{3}} - 3 + \frac{1}{\sqrt[3]{1000000^2}} &< S_{1000000} < 3 \cdot 1000000^{\frac{1}{3}} - 2 \\ \Leftrightarrow 300 - 3 + \frac{1}{10000} &< S_{1000000} < 300 - 2 \\ \therefore 297.0001 &< S_{1000000} < 298 \end{aligned}$$

となるから、 $S_{1000000}$ の整数部分は 297 である。