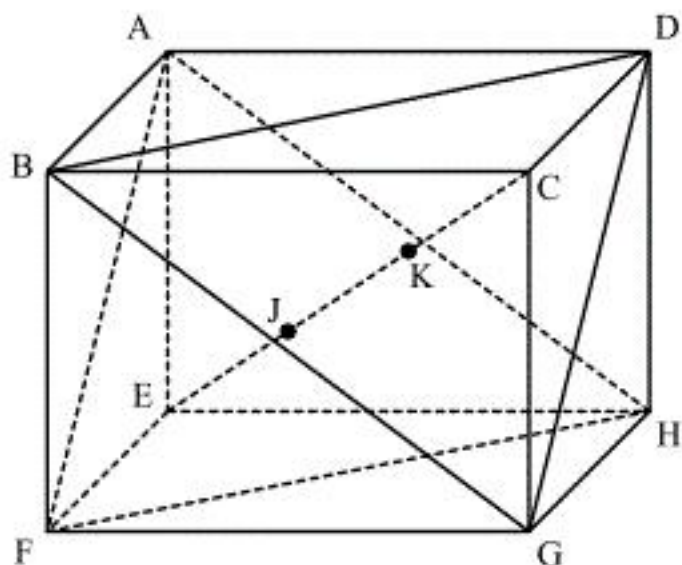


1.

(1)



$\overrightarrow{EA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{EF} = \vec{f}$, $\overrightarrow{EH} = \vec{h}$ とすると,

$$\overrightarrow{EC} = \vec{a} + \vec{f} + \vec{h}$$

である。点 J は線分 EC 上にあることから、実数 k ($0 < k < 1$) を用いて

$$\overrightarrow{EJ} = k\overrightarrow{EC} = k(\vec{a} + \vec{f} + \vec{h}) = k\vec{a} + k\vec{f} + k\vec{h}$$

と表せる。ここで、点 J は $\triangle AFH$ 上にあることから、

$$k + k + k = 1$$

$$\therefore k = \frac{1}{3}$$

を得る。よって、 $\overrightarrow{EJ} = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{f} + \vec{h})$ であり、これは点 J が $\triangle AFH$ の重心であることを意味する。

(証明終)

(2)

(1)より、点 J は線分 EC を 1:2 に内分する点である。対称性より、点 K は線分 CE を 1:2 に内分する点である。したがって、点 J, K は線分 EC を 3 等分し、 $EJ = JK = CK$ となる。 $\triangle AEJ$, $\triangle AJK$, $\triangle ACK$ の底辺をそれぞれ EJ, JK, CK とみると、3 つの三角形は底辺と高さが等しいから、面積も等しい。

(証明終)

2.

(1)

10回コインを投げたときに、表が出る回数を t とし、点Pが合計で $L(t)$ 進んだすると、

$$L(t) = 2t + (10 - t) = t + 10$$

である。 $0 \leq t \leq 10$ より、 $10 \leq L(t) \leq 20$ となることに注意すると、コインを投げ終えた後の点Pの位置、 $L(t)$ 、 t の関係は、下の表のようになる。

Pの位置	$L(t)$	t
A	12, 16, 20	2, 6, 10
B	13, 17	3, 7
C	10, 14, 18	0, 4, 8
D	11, 15, 19	1, 5, 9

表が t 回出る確率は ${}_{10}C_t \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$ だから、点PがA, B, C, Dにいる確率をそれぞれ $P(A)$, $P(B)$, $P(C)$, $P(D)$ とすると、

$$P(A) = {}_{10}C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^{10} + {}_{10}C_6 \left(\frac{1}{2}\right)^{10} + {}_{10}C_{10} \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{256}{2^{10}} = \frac{1}{4}$$

$$P(B) = {}_{10}C_3 \left(\frac{1}{2}\right)^{10} + {}_{10}C_7 \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{240}{2^{10}} = \frac{15}{64}$$

$$P(C) = {}_{10}C_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{10} + {}_{10}C_4 \left(\frac{1}{2}\right)^{10} + {}_{10}C_8 \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{256}{2^{10}} = \frac{1}{4}$$

$$P(D) = {}_{10}C_1 \left(\frac{1}{2}\right)^{10} + {}_{10}C_5 \left(\frac{1}{2}\right)^{10} + {}_{10}C_9 \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{272}{2^{10}} = \frac{17}{64}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{1}{4}, \frac{15}{64}, \frac{1}{4}, \frac{17}{64}$$

(2)

Qは初めの状態で、点Aから2つ進んだ点Cにいるから、コインを10回投げたときにQが点A, B, C, Dにいる確率は、それぞれ $P(C)$, $P(D)$, $P(A)$, $P(B)$ である。よって、求める確率は

$$\begin{aligned} & P(A) \cdot P(C) + P(B) \cdot P(D) + P(C) \cdot P(A) + P(D) \cdot P(B) \\ &= 2\{P(A)P(C) + P(B)P(D)\} \\ &= 2\left(\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{15}{64} \cdot \frac{17}{64}\right) \\ &= \frac{511}{2048} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{511}{2048}$$

3.

(1)

C_1 と l_1 の接点を $(t, f(t))$ とすると、 $f'(x)=2ax$ より、 l_1 の方程式は

$$\begin{aligned} y-f(t) &= 2at(x-t) \\ \Leftrightarrow y &= 2atx-at^2+a^2 \end{aligned} \quad \dots \textcircled{1}$$

である。このとき l_1 と C_2 が接するための条件は、

$$\begin{aligned} 2atx-at^2+a^2 &= ax^2-4ax+5a^2 \\ \Leftrightarrow x^2-2(t+2)x+t^2+4a &= 0 \quad (\because a>0) \end{aligned} \quad \dots \textcircled{2}$$

が重解をもつ、すなわち判別式を D として、 $\frac{D}{4}=0$ となることである。よって

$$\begin{aligned} (t+2)^2-(t^2+4a) &= 0 \\ \therefore t &= a-1 \end{aligned}$$

となる。これを①に代入して、

$$\begin{aligned} y &= 2a(a-1)x-a(a-1)^2+a^2 \\ \therefore y &= (2a^2-2a)x-a^3+3a^2-a \end{aligned}$$

である。

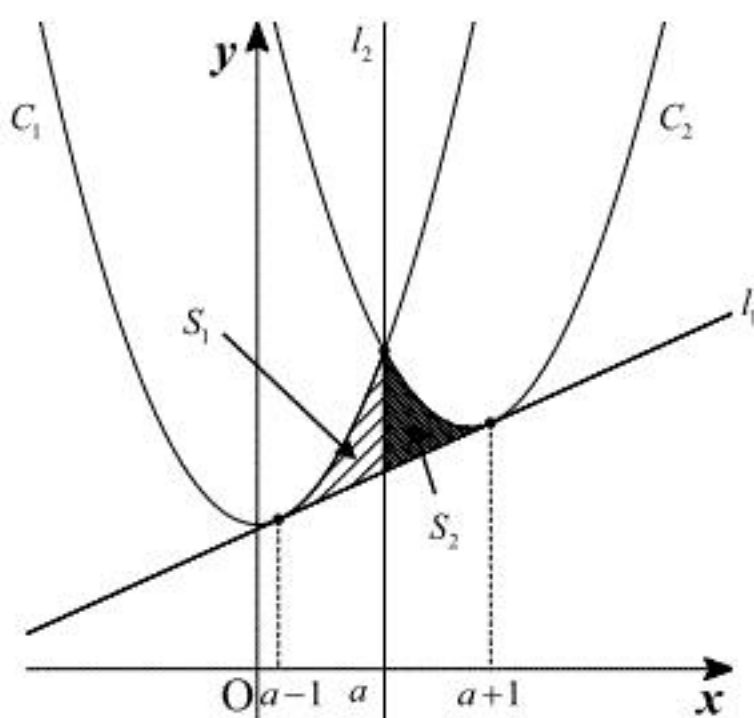
$$(\text{答}) \quad y = (2a^2 - 2a)x - a^3 + 3a^2 - a$$

(2)

C_1 と C_2 の交点の x 座標を求めると、

$$\begin{aligned} ax^2+a^2 &= ax^2-4ax+5a^2 \\ \Leftrightarrow 4ax &= 4a^2 \\ \therefore x &= a \quad (\because a>0) \end{aligned}$$

となる。よって、 l_2 の方程式は $l_2: x=a$ であるから、 S_1 は下図の斜線部の面積である。



したがって、

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_{a-1}^a \left\{ (ax^2+a^2) - ((2a^2-2a)x-a^3+3a^2-a) \right\} dx \\ &= a \int_{a-1}^a (x-a+1)^2 dx \\ &= a \left[\frac{(x-a+1)^3}{3} \right]_{a-1}^a \\ &= \frac{a}{3} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{a}{3}$$

(3)

C_2 と l_1 の接点の x 座標は、方程式②の重解である。②に $t=a-1$ を代入すると、

$$x^2-2(a+1)x+(a-1)^2+4a=0 \Leftrightarrow \{x-(a+1)\}^2=0$$

となるから、 $x=a+1$ と分かる。よって S_2 は前図の打点部の面積であり、

$$\begin{aligned} S_2 &= \int_a^{a+1} \left\{ (ax^2-4ax+5a^2) - ((2a^2-2a)x-a^3+3a^2-a) \right\} dx \\ &= a \int_a^{a+1} (x-a-1)^2 dx \\ &= a \left[\frac{(x-a-1)^3}{3} \right]_a^{a+1} \\ &= \frac{a}{3} \end{aligned}$$

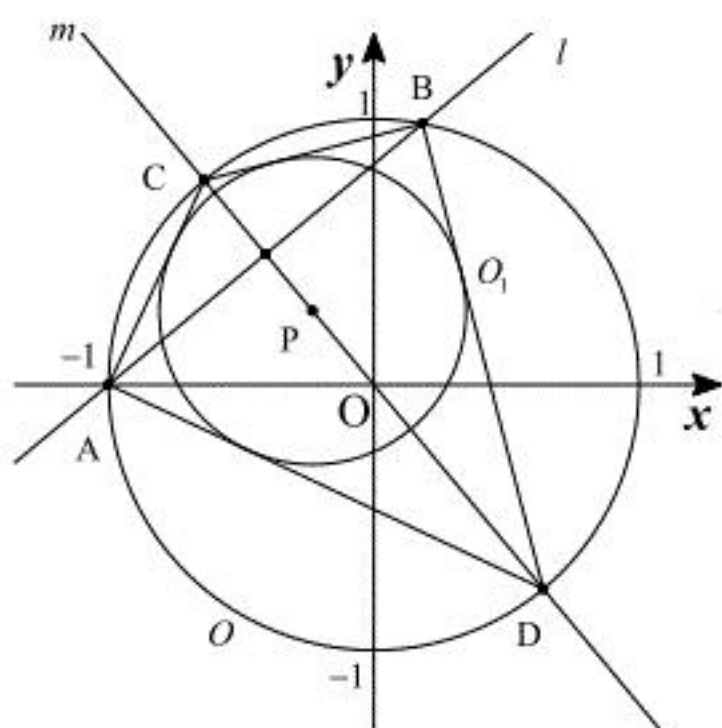
を得る。よって、

$$S_1:S_2 = \frac{a}{3}:\frac{a}{3} = 1:1$$

となる。

$$(\text{答}) \quad 1:1$$

4.



(1)

まず、点 A, B の座標を求める。直線 l と円 O の交点の x 座標は、

$$\begin{aligned} x^2 + \left(\sqrt{a^2-1}x + \sqrt{a^2-1} \right)^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow a^2x^2 + 2(a^2-1)x + a^2 - 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (a^2x + a^2 - 2)(x+1) &= 0 \\ \therefore x &= -1, -1 + \frac{2}{a^2} \end{aligned}$$

である。それぞれを $y = \sqrt{a^2-1}x + \sqrt{a^2-1}$ に代入することで、直線 l と円 O の交点の座標は

$(-1, 0), \left(-1 + \frac{2}{a^2}, \frac{2\sqrt{a^2-1}}{a^2} \right)$ とわかる。 $-1 < -1 + \frac{2}{a^2}$ だから $A(-1, 0), B\left(-1 + \frac{2}{a^2}, \frac{2\sqrt{a^2-1}}{a^2}\right)$ となる。

次に、点 C, D の座標を求める。原点を O とすると $|OA| = |OB|$ および $|AC| = |BC|, |AD| = |BD|$ が成り立つので、点 O, C, D は直線 AB の垂直二等分線上にある。直線 AB の垂直二等分線を m

とすると、 m は点 O を通り傾き $-\frac{1}{\sqrt{a^2-1}}$ の直線であるから、 m の方程式は、

$$y = -\frac{1}{\sqrt{a^2-1}}x$$

である。2点 C, D は直線 m と円 O の交点である。直線 m と円 O の交点の x 座標は、

$$\begin{aligned} x^2 + \left(-\frac{1}{\sqrt{a^2-1}}x \right)^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow \frac{a^2}{a^2-1}x^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow x &= \pm \frac{\sqrt{a^2-1}}{a} \quad (\because a > 1) \end{aligned}$$

となる。したがって、 $C\left(-\frac{\sqrt{a^2-1}}{a}, \frac{1}{a}\right), D\left(\frac{\sqrt{a^2-1}}{a}, -\frac{1}{a}\right)$ となる。

最後に、四角形 $ADBC$ の面積を求める。線分 AB, CD は直交することから、求める面積 S_0 は、

$$S_0 = \frac{1}{2}|AB| \cdot |CD|$$

と表せる。ここで、

$$|AB| = \sqrt{\left\{ \left(-1 + \frac{2}{a^2} \right) - (-1) \right\}^2 + \left(\frac{2\sqrt{a^2-1}}{a^2} - 0 \right)^2} = \frac{2}{a}$$

であり、また、線分 CD は円 O の直径なので、 $|CD| = 1 \cdot 2 = 2$ である。したがって、

$$S_0 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{a} \cdot 2 = \frac{2}{a}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad A(-1, 0), B\left(-1 + \frac{2}{a^2}, \frac{2\sqrt{a^2-1}}{a^2}\right), C\left(-\frac{\sqrt{a^2-1}}{a}, \frac{1}{a}\right), D\left(\frac{\sqrt{a^2-1}}{a}, -\frac{1}{a}\right), S_0 = \frac{2}{a}$$

(2)

四角形 $ADBC$ は線分 CD に関して線対称だから、点 P は線分 CD 上にある。さらに、直線 AP は $\angle CAD$ の二等分線であるから、点 P は線分 CD を $|AC|:|AD|$ に内分する点である。ここで、

$$\begin{aligned} |AC| &= \sqrt{\left\{ -\frac{\sqrt{a^2-1}}{a} - (-1) \right\}^2 + \left(\frac{1}{a} - 0 \right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{2a - 2\sqrt{a^2-1}}{a}} \\ &= \sqrt{\frac{(\sqrt{a+1} - \sqrt{a-1})^2}{a}} \\ &= \frac{\sqrt{a+1}}{\sqrt{a}} - \frac{\sqrt{a-1}}{\sqrt{a}} \end{aligned}$$

$$(\text{答}) \quad P\left(\frac{1}{a} - 1, \frac{\sqrt{a^2-1}}{a(a+1)}\right), S_1 = \frac{\pi}{a(a+1)}$$

(3)

$S = \pi$ であるから、

$$\begin{aligned} S:S_1 &= 6:1 \\ \Leftrightarrow \pi : \frac{\pi}{a(a+1)} &= 6:1 \\ \Leftrightarrow 6 \cdot \frac{\pi}{a(a+1)} &= \pi \\ \Leftrightarrow a(a+1) &= 6 \\ \Leftrightarrow (a-2)(a+3) &= 0 \\ \therefore a &= 2 \quad (\because a > 1) \end{aligned}$$

となる。このとき $S_0 = \frac{2}{2} = 1$ である。

(答) $a = 2, S_0 = 1$