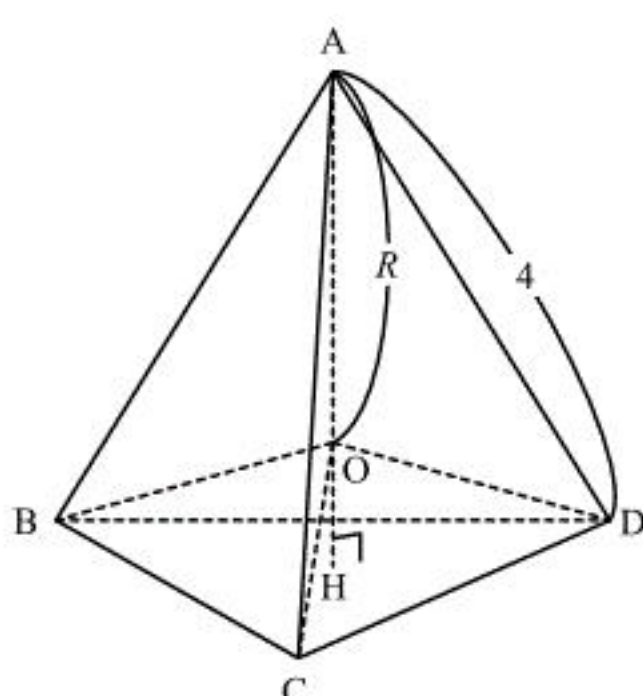


1.

(1)

1 辺の長さが 4 の正四面体の 4 頂点を A, B, C, D とする。正四面体 ABCD について、外接球の中心を O, 外接球の半径を R とする。



点 H を点 A から平面 BCD に下ろした垂線の足とする。3 つの直角三角形 AHB, AHC, AHD について、辺 AH が共通で

$$AB = AC = AD$$

が成り立つから、斜辺とその他の一辺がそれぞれ等しいため、三角形 AHB $\equiv$ 三角形 AHC $\equiv$ 三角形 AHD となる。よって、

$$HB = HC = HD$$

となるから、点 H は三角形 BCD の外心である。点 O から平面 BCD に下ろした垂線の足を I とすると、点 O は外接球の中心であるから $OB = OC = OD$ が成り立ち、これより同様の議論から点 I も三角形 BCD の外心となるから、 $H = I$ であり、点 O が直線 AH 上にあることが分かる。また、線分 HB は三角形 BCD の外接円の半径であり、正弦定理より、

$$HB = \frac{1}{2} \cdot \frac{CD}{\sin \angle CBD} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{\sin 60^\circ} = \frac{4}{3} \sqrt{3}$$

である。したがって、三角形 AHB において、三平方の定理より、

$$AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{16 - \frac{16}{3}} = \frac{4}{3} \sqrt{6}$$

となる。すると、三角形 OHB において、

$$OB = R$$

$$OH = AH - AO = \frac{4}{3} \sqrt{6} - R$$

$$HB = \frac{4}{3} \sqrt{3}$$

となり、三平方の定理から、

$$OB^2 = OH^2 + HB^2$$

$$\Leftrightarrow R^2 = \left(\frac{4}{3} \sqrt{6} - R \right)^2 + \left(\frac{4}{3} \sqrt{3} \right)^2$$

$$\Leftrightarrow R^2 = R^2 - \frac{8}{3} \sqrt{6} R + \frac{32}{3} + \frac{16}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{8}{3} \sqrt{6} R = 16$$

$$\therefore R = \sqrt{6}$$

となる。

(答) $\sqrt{6}$

(2)

与式を変形すると、

$$\overrightarrow{AP} + 2\overrightarrow{BP} + 3\overrightarrow{CP} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AP} + 2(\overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AB}) + 3(\overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AC}) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow 6\overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$$

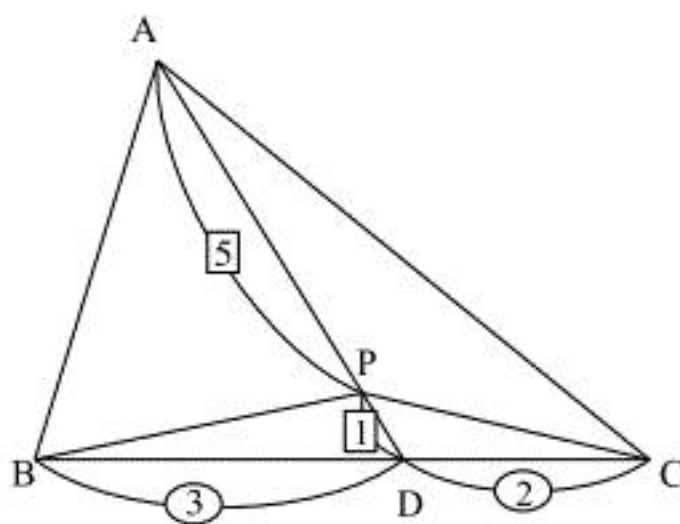
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AP} = \frac{5}{6} \left(\frac{2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}}{5} \right)$$

となる。

$$\overrightarrow{AD} = \frac{2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}}{3+2}$$

となる点 D をとると、D は辺 BC を 3:2 に内分する点であり、 $\overrightarrow{AP} = \frac{5}{6} \overrightarrow{AD}$ より点 P は線分 AD

を 5:1 に内分する点である。したがって、各点を図示すると以下の図のようになる。



三角形 ABC の面積を S とすると、上図より

$$S_1 = \frac{3}{3+2} \cdot \frac{5}{5+1} S = \frac{1}{2} S$$

$$S_2 = \frac{1}{5+1} S = \frac{1}{6} S$$

$$S_3 = \frac{2}{3+2} \cdot \frac{5}{5+1} S = \frac{1}{3} S$$

であるから、 $S_1 : S_2 : S_3 = \frac{1}{2} S : \frac{1}{6} S : \frac{1}{3} S = 3 : 1 : 2$ である。

(答) $S_1 : S_2 : S_3 = 3 : 1 : 2$

2.

(1)

10回コインを投げたときに、表が出る回数を t (t は整数)とし、点Pが合計で $L(t)$ 進んだとすると、

$$L(t) = 2t + (10 - t) = t + 10$$

である。 $0 \leq t \leq 10$ より、 $10 \leq L(t) \leq 20$ となることに注意すると、コインを投げ終えた後の点Pの位置、 $L(t)$ 、 t の関係は、下の表のようになる。

Pの位置	$L(t)$	t
A	12, 16, 20	2, 6, 10
B	13, 17	3, 7
C	10, 14, 18	0, 4, 8
D	11, 15, 19	1, 5, 9

表が t 回出る確率は ${}_{10}C_t \left(\frac{1}{2}\right)^t \left(\frac{1}{2}\right)^{10-t} = {}_{10}C_t \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$ だから、点PがA, B, C, Dにいる確率をそれぞれ $P(A)$, $P(B)$, $P(C)$, $P(D)$ とすると、

$$P(A) = {}_{10}C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^{10} + {}_{10}C_6 \left(\frac{1}{2}\right)^{10} + {}_{10}C_{10} \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{256}{2^{10}} = \frac{1}{4}$$

$$P(B) = {}_{10}C_3 \left(\frac{1}{2}\right)^{10} + {}_{10}C_7 \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{240}{2^{10}} = \frac{15}{64}$$

$$P(C) = {}_{10}C_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{10} + {}_{10}C_4 \left(\frac{1}{2}\right)^{10} + {}_{10}C_8 \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{256}{2^{10}} = \frac{1}{4}$$

$$P(D) = {}_{10}C_1 \left(\frac{1}{2}\right)^{10} + {}_{10}C_5 \left(\frac{1}{2}\right)^{10} + {}_{10}C_9 \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{272}{2^{10}} = \frac{17}{64}$$

となる。

(答) 順に $\frac{1}{4}, \frac{15}{64}, \frac{1}{4}, \frac{17}{64}$

(2)

Qは初めの状態で、点Aから2つ進んだ点Cにいるから、コインを10回投げたときにQが点A, B, C, Dにいる確率は、それぞれ $P(C)$, $P(D)$, $P(A)$, $P(B)$ である。よって、求める確率は

$$\begin{aligned} & P(A) \cdot P(C) + P(B) \cdot P(D) + P(C) \cdot P(A) + P(D) \cdot P(B) \\ &= 2 \{ P(A)P(C) + 2P(B)P(D) \} \\ &= 2 \left(\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{15}{64} \cdot \frac{17}{64} \right) \\ &= \frac{511}{2048} \end{aligned}$$

である。

(答) $\frac{511}{2048}$

3.

(1)

$n \geq 4$ の範囲を考えれば十分である。このとき

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

となるから、 $S_5 = 1 - \frac{1}{5+1} = \frac{5}{6}$ である。また、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1$$

である。

$$(\text{答}) \quad S_5 = \frac{5}{6}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1$$

(2)

積の微分公式より

$$\begin{aligned} y' &= (x^2)' e^{-x} + x^2 (e^{-x})' \\ &= 2x \cdot e^{-x} + x^2 \cdot (-e^{-x}) \\ &= x(2-x)e^{-x} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad y' = x(2-x)e^{-x}$$

(3)

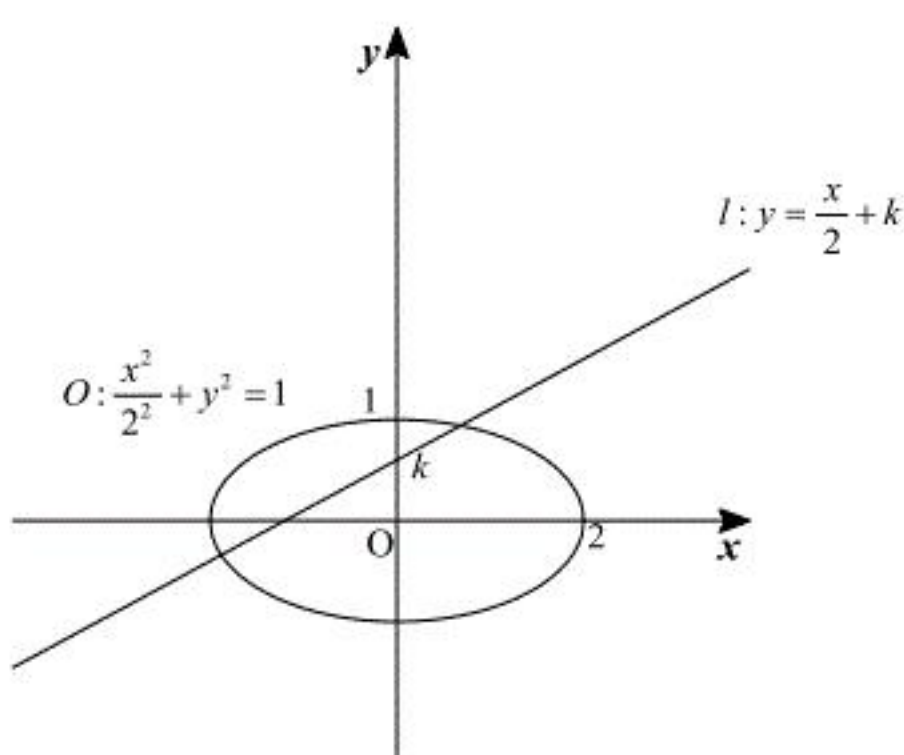
部分積分により

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} x \cos x dx &= \int_0^{\pi} x (\sin x)' dx \\ &= [x \sin x]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 1 \cdot \sin x dx \\ &= 0 + [\cos x]_0^{\pi} \\ &= -2 \end{aligned}$$

となる。

4.

(1)



楕円 $O: \frac{x^2}{2^2} + y^2 = 1$ の式と直線 $l: y = \frac{x}{2} + k$ の式から y を消去すると

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{2^2} + \left(\frac{x}{2} + k\right)^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2 + kx + k^2 &= 1\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2kx + 2k^2 - 2 = 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

となる。よって、楕円 O と直線 l が 2 点で交わる条件は、 x の 2 次方程式①が異なる 2 実数解をもつことである。すなわち、この方程式の判別式が正となることであるから、

$$\begin{aligned}k^2 - (2k^2 - 2) &> 0 \\ \Leftrightarrow -\sqrt{2} < k < \sqrt{2}\end{aligned}$$

である。 $k > 0$ も考慮して、求める条件は $0 < k < \sqrt{2}$ である。

(答) $0 < k < \sqrt{2}$

(2)

2 点 A, B の x 座標をそれぞれ α, β とすると α, β は方程式①の 2 解だから、解と係数の関係より

$$\begin{cases} \alpha + \beta = -2k \\ \alpha\beta = 2k^2 - 2 \end{cases}$$

である。2 点 A, B の座標はそれぞれ $\left(\alpha, \frac{\alpha}{2} + k\right), \left(\beta, \frac{\beta}{2} + k\right)$ であるから、

$$\begin{aligned}AB &= \sqrt{(\beta - \alpha)^2 + \left\{\frac{1}{2}(\beta - \alpha)\right\}^2} \\ &= \frac{\sqrt{5}}{2} \sqrt{(\beta - \alpha)^2} \\ &= \frac{\sqrt{5}}{2} \sqrt{(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta} \\ &= \frac{\sqrt{5}}{2} \sqrt{(-2k)^2 - 4(2k^2 - 2)} \\ &= \sqrt{5(2 - k^2)}\end{aligned}$$

となる。

(答) $AB = \sqrt{5(2 - k^2)}$

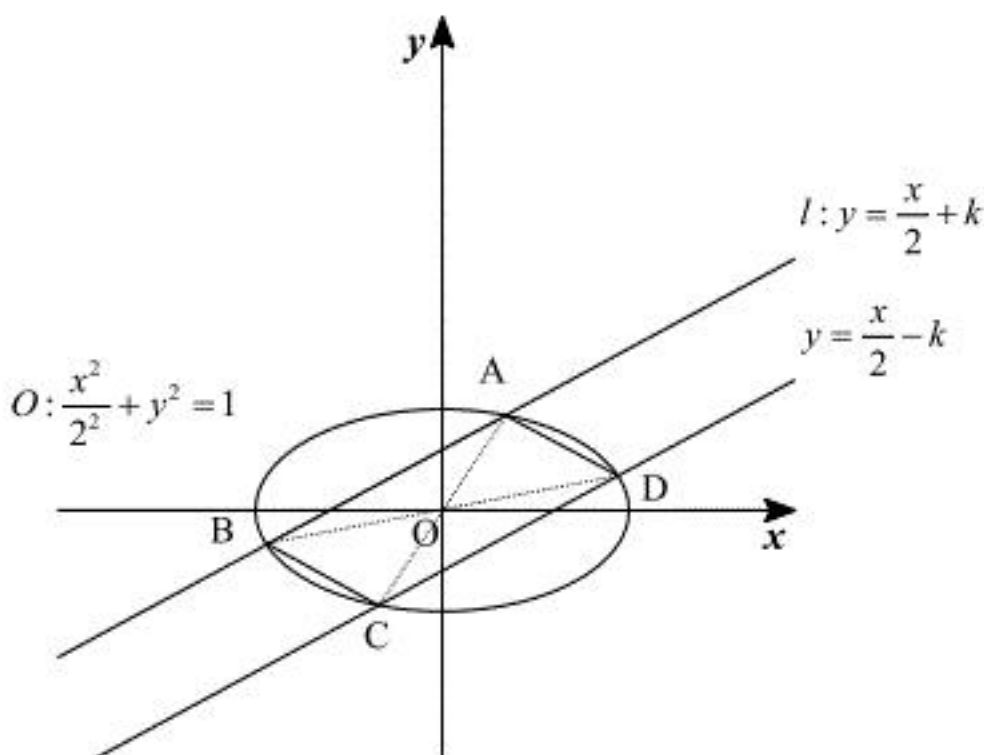
(3)

四角形 ABCD は平行四辺形であるので $AB \parallel DC$, $AB = DC$ である。よって直線 DC の方程式は

実数 t を用いて $y = \frac{x}{2} + t$ ($t \neq k$) とおけて、(2) と同様にして $DC = \sqrt{5(2 - t^2)}$ となるから、

$$\begin{aligned}AB &= DC \\ \Leftrightarrow \sqrt{5(2 - k^2)} &= \sqrt{5(2 - t^2)} \\ \Leftrightarrow k^2 &= t^2 \\ \Leftrightarrow t &= -k \quad (\because t \neq k)\end{aligned}$$

である。



また、直線 $l: y = \frac{x}{2} + k$ 上の点 $(0, k)$ と直線 $y = \frac{x}{2} - k$ との距離は、

$$\frac{\left|k - \frac{0}{2} + k\right|}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + (-1)^2}} = \frac{4}{\sqrt{5}}k$$

である。よって、底辺を AB としたときの平行四辺形 ABCD の高さは $\frac{4}{\sqrt{5}}k$ となる。したがって

平行四辺形 ABCD の面積 S は

$$\begin{aligned}S &= \sqrt{5(2 - k^2)} \cdot \frac{4}{\sqrt{5}}k \\ &= 4\sqrt{(2 - k^2)k^2} \\ &= 4\sqrt{-(k^2 - 1)^2 + 1}\end{aligned}$$

であり、 $k > 0$ において、 $k = 1$ のとき最大値 4 をとる。

(答) $k = 1$ のとき最大値 4