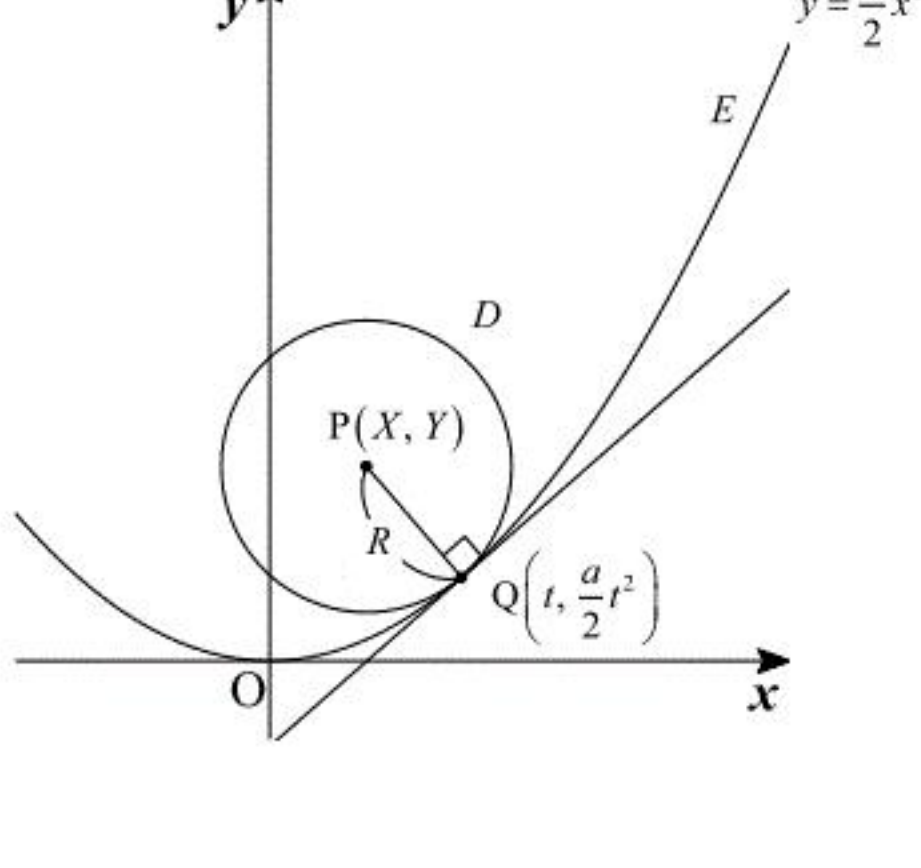


1.

(1)

以下に、放物線 E 、円 D および点 P, Q を図示する。



$y = \frac{a}{2}x^2$ の両辺を x で微分すると、 $y' = ax$ であるから、点 Q における放物線 E の接線の傾きは at である。接線 の方向ベクトルは $(1, at)$ であるから、これに垂直なベクトルの1つを $\vec{n}$ とすると、 $\vec{n} = (at, -1)$ である。図より $\overline{PQ}$ は $\vec{n}$ と平行で、大きさが R 、 y 成分が負であるベクトルとなるから、

$$\overline{PQ} = R \cdot \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{R}{\sqrt{a^2t^2+1}}(at, -1)$$

と表せる。したがって、

$$\begin{aligned}\overline{OP} &= \overline{OQ} - \overline{PQ} \\ &= \left(t, \frac{a}{2}t^2\right) - \frac{R}{\sqrt{a^2t^2+1}}(at, -1) \\ &= \left(t - \frac{aRt}{\sqrt{a^2t^2+1}}, \frac{a}{2}t^2 + \frac{R}{\sqrt{a^2t^2+1}}\right)\end{aligned}$$

である。よって、 $(X, Y) = \left(t - \frac{aRt}{\sqrt{a^2t^2+1}}, \frac{a}{2}t^2 + \frac{R}{\sqrt{a^2t^2+1}}\right)$ を得る。

$$(\text{答}) \quad (X, Y) = \left(t - \frac{aRt}{\sqrt{a^2t^2+1}}, \frac{a}{2}t^2 + \frac{R}{\sqrt{a^2t^2+1}}\right)$$

(2)

(1) の X, Y を改めて $X(t), Y(t)$ とおく。円 D と放物線 E が異なる2つの接点を持つとき、2つの接点の x 座標をそれぞれ p, q ($p < q$) とすると、

$$\begin{cases} X(p) = X(q) & \cdots \text{①} \\ Y(p) = Y(q) & \cdots \text{②} \end{cases}$$

が成り立つ。ここで、

$$X'(t) = 1 - aR \cdot \frac{\sqrt{a^2t^2+1} - t - \frac{2a^2t}{2\sqrt{a^2t^2+1}}}{\left(\sqrt{a^2t^2+1}\right)^2} = 1 - \frac{aR}{\left(a^2t^2+1\right)^{\frac{3}{2}}}$$

となる。 $aR \leq 1$ のとき、任意の t について、

$$X'(t) \geq 1 - \frac{1}{\left(a^2t^2+1\right)^{\frac{3}{2}}} \geq 1 - 1 = 0$$

であるから、 $X(t)$ は単調増加である。よって、異なる実数 p, q ($p < q$) に対して①は成り立たない。したがって、 $aR > 1$ が必要である。また、円 D は $y \geq \frac{a}{2}x^2$ の領域にあることから、 $X(t)$

は $t < 0$ で0以下、 $t \geq 0$ で0以上である。すなわち、

$$X(t) = t \left(1 - \frac{aR}{\sqrt{a^2t^2+1}}\right)$$

より、 $f(t) = \frac{aR}{\sqrt{a^2t^2+1}}$ とすると、任意の t に対して

$$1 - f(t) \geq 0 \Leftrightarrow f(t) \leq 1$$

が必要である。 $aR > 1$ のもとで $f(t) > 0$ であるから

$$\begin{aligned}\{f(t)\}^2 &\leq 1^2 \\ \Leftrightarrow a^2t^2 &\geq a^2R^2 - 1 \\ \Leftrightarrow t &\leq -\frac{\sqrt{a^2R^2-1}}{a}, \frac{\sqrt{a^2R^2-1}}{a} \leq t\end{aligned}$$

となる。しかし、この範囲において、

$$X'(t) \geq 1 - \frac{aR}{\left(a^2R^2-1+1\right)^{\frac{3}{2}}} = 1 - \frac{1}{a^2R^2} > 0$$

であり、 $X(t)$ は単調増加である。よって、直接 $X(p) = X(q)$ となる t を探すと、

$t = \pm \frac{\sqrt{a^2R^2-1}}{a}$ はどちらも $X(t) = 0$ を満たし、①の条件を満たす。さらに、

$$p = -\frac{\sqrt{a^2R^2-1}}{a}, q = \frac{\sqrt{a^2R^2-1}}{a} \quad (\because p < q)$$

とおくと、

$$\begin{aligned}Y\left(-\frac{\sqrt{a^2R^2-1}}{a}\right) &= \frac{a}{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{a^2R^2-1}}{a}\right)^2 + \frac{R}{\sqrt{a^2 \cdot \left(-\frac{\sqrt{a^2R^2-1}}{a}\right)^2 + 1}} = \frac{a^2R^2-1}{2a} \\ Y\left(\frac{\sqrt{a^2R^2-1}}{a}\right) &= \frac{a}{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{a^2R^2-1}}{a}\right)^2 + \frac{R}{\sqrt{a^2 \cdot \left(\frac{\sqrt{a^2R^2-1}}{a}\right)^2 + 1}} = \frac{a^2R^2-1}{2a}\end{aligned}$$

となるから、②も満たす。したがって、求める条件は $aR > 1$ で、接点の座標は

$$\left(\pm \frac{\sqrt{a^2R^2-1}}{a}, \frac{a^2R^2-1}{2a}\right) \text{ である。}$$

$$(\text{答}) \quad aR > 1, \left(\pm \frac{\sqrt{a^2R^2-1}}{a}, \frac{a^2R^2-1}{2a}\right)$$

(3)

円 D の中心 P と、放物線 E 上の任意の点 $U\left(u, \frac{a}{2}u^2\right)$ との距離を考える。任意の U に対して

$PU \geq R$ 、すなわち $PU^2 \geq R^2$ が成り立てば、円 D は $y \geq \frac{a}{2}x^2$ の領域にあると言える。ただし、

放物線 E が y 軸に関して対称であるから、 $u \geq 0, t \geq 0$ のときを考えれば十分である。したがって、

$$g(u) = PU^2 = \left(u - X(t)\right)^2 + \left(\frac{a}{2}u^2 - Y(t)\right)^2 \quad (u \geq 0)$$

とおいて、 $g(u)$ の最小値が R^2 以上となるような t の範囲を調べる。 $g(u)$ を u で微分すると、

$$\begin{aligned}g'(u) &= 2\left(u - X(t)\right) + 2\left(\frac{a}{2}u^2 - Y(t)\right) \cdot au \\ &= 2\left(u - t + \frac{aRt}{\sqrt{a^2t^2+1}}\right) + 2au\left(\frac{a}{2}u^2 - \frac{a}{2}t^2 - \frac{R}{\sqrt{a^2t^2+1}}\right) \\ &= 2(u-t) - 2(u-t) \cdot \frac{aR}{\sqrt{a^2t^2+1}} + a^2u(u^2 - t^2) \\ &= (u-t) \left\{a^2u^2 + a^2tu + 2(1-f(t))\right\}\end{aligned}$$

となる。以下、 aR の範囲で場合分けを行う。

[1] $aR \leq 1$ のとき

$$1 - f(t) = 1 - \frac{aR}{\sqrt{a^2t^2+1}} \geq 1 - \frac{1}{\sqrt{a^2 \cdot 0 + 1}} = 0$$

であるから、増減表は以下ようになる。

u	0	...	t	...
$g'(u)$		-	0	+
$g(u)$		$\searrow$	最小	$\nearrow$

上表より、最小値は $u = t$ のときに、

$$g(t) = \left(\frac{aRt}{\sqrt{a^2t^2+1}}\right)^2 + \left(-\frac{R}{\sqrt{a^2t^2+1}}\right)^2 = R^2$$

となる。 $g(u)$ の最小値は t の値によらず R^2 であるから、 t のとりうる値の範囲は $t \geq 0$ を満たす実数全体である。

[2] $aR > 1$ のとき

(2) より、 $t \geq \frac{\sqrt{a^2R^2-1}}{a}$ のときは、 $1 - f(t) \geq 0$ であるから、[1] と同様に $g(u)$ の最小値は

R^2 となる。すなわち、 $t \geq \frac{\sqrt{a^2R^2-1}}{a}$ は条件を満たす。一方、 $0 \leq t < \frac{\sqrt{a^2R^2-1}}{a}$ のときは、

(2) より $X(t) < 0$ となるため、点 P が $y \geq \frac{a}{2}x^2$ の領域に存在し得ず不適である。

以上[1], [2]及び対称性を考慮することにより、円 D が領域 $y \geq \frac{a}{2}x^2$ に存在するための t の取りうる値の範囲は、 $aR \leq 1$ のとき実数全体、 $aR > 1$ のとき $t \leq -\frac{\sqrt{a^2R^2-1}}{a}, \frac{\sqrt{a^2R^2-1}}{a} \leq t$ である。

$$(\text{答}) \quad aR \leq 1 \text{ のとき実数全体, } aR > 1 \text{ のとき } t \leq -\frac{\sqrt{a^2R^2-1}}{a}, \frac{\sqrt{a^2R^2-1}}{a} \leq t$$

(4)

X, Y を t の関数と見ると、

$$\begin{aligned}\frac{dX}{dt} &= 1 - \frac{aR\sqrt{a^2t^2+1} - aRt \cdot \frac{2a^2t}{2\sqrt{a^2t^2+1}}}{\left(\sqrt{a^2t^2+1}\right)^2} = 1 - \frac{aR}{\left(a^2t^2+1\right)^{\frac{3}{2}}} \\ \frac{dY}{dt} &= at - \frac{R \cdot \frac{2a^2t}{2\sqrt{a^2t^2+1}}}{\left(\sqrt{a^2t^2+1}\right)^2} = at \left\{1 - \frac{aR}{\left(a^2t^2+1\right)^{\frac{3}{2}}}\right\}\end{aligned}$$

となるから、

$$\frac{dY}{dX} = \frac{\frac{dY}{dt}}{\frac{dX}{dt}} = at$$

である。

[1] $aR \leq 1$ のとき

(2) より、 $X(t)$ は単調増加であるから、 $X \rightarrow 0+0$ で $t \rightarrow 0+0$ 、 $X \rightarrow 0-0$ で $t \rightarrow 0-0$ となる。したがって、

$$\lim_{X \rightarrow 0+0} \left(\frac{dY}{dX}\right) - \lim_{X \rightarrow 0-0} \left(\frac{dY}{dX}\right) = \lim_{t \rightarrow 0+0} at - \lim_{t \rightarrow 0-0} at = 0$$

である。

[2] $aR > 1$ のとき

(2) より、 $t \leq -\frac{\sqrt{a^2R^2-1}}{a}, \frac{\sqrt{a^2R^2-1}}{a} \leq t$ のとき $X(t)$ は単調増加し、また $t = \pm \frac{\sqrt{a^2R^2-1}}{a}$

で $X\left(\pm \frac{\sqrt{a^2R^2-1}}{a}\right) = 0$ となるから、 $X \rightarrow 0+0$ で $t \rightarrow \frac{\sqrt{a^2R^2-1}}{a} + 0$ 、 $X \rightarrow 0-0$ で

$t \rightarrow -\frac{\sqrt{a^2R^2-1}}{a} - 0$ となる。したがって、

$$\begin{aligned}\lim_{X \rightarrow 0+0} \left(\frac{dY}{dX}\right) - \lim_{X \rightarrow 0-0} \left(\frac{dY}{dX}\right) &= \lim_{t \rightarrow \frac{\sqrt{a^2R^2-1}}{a} + 0} at - \lim_{t \rightarrow -\frac{\sqrt{a^2R^2-1}}{a} - 0} at \\ &= a \cdot \frac{\sqrt{a^2R^2-1}}{a} - a \left(-\frac{\sqrt{a^2R^2-1}}{a}\right) \\ &= 2\sqrt{a^2R^2-1}\end{aligned}$$

である。

以上[1], [2]より、 $0 < aR \leq 1$ のとき、

$$\lim_{X \rightarrow 0+0} \left(\frac{dY}{dX}\right) - \lim_{X \rightarrow 0-0} \left(\frac{dY}{dX}\right) = 0$$

であり、 $aR > 1$ のとき、

$$\lim_{X \rightarrow 0+0} \left(\frac{dY}{dX}\right) - \lim_{X \rightarrow 0-0} \left(\frac{dY}{dX}\right) = 2\sqrt{a^2R^2-1}$$

である。

$$(\text{答}) \quad 0 < aR \leq 1 \text{ のとき } 0, \quad aR > 1 \text{ のとき } 2\sqrt{a^2R^2-1}$$

2.

(1)

$$f'(x) = \frac{\frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}} \cdot x - \sqrt{x^2-1} \cdot 1}{x^2} = \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-1}}$$

であるから、 $x > 1$ のとき $f'(x) > 0$ である。よって $x \geq 1$ において $f(x)$ は単調増加である。さらに、

$$f''(x) = -\frac{2x\sqrt{x^2-1} + x^2 \frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}}{\left(x^2\sqrt{x^2-1}\right)^2} = -\frac{3x^2-2}{x^3(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}$$

であるから、 $x > 1$ のとき $f''(x) < 0$ である。よって曲線 C は上に凸である。

(証明終)

(2)

曲線 C と接線 ℓ の接点を $T(t, f(t))$ ($t > 1$) とすると、接線 ℓ の方程式は

$$\ell: y = \frac{1}{t^2\sqrt{t^2-1}}(x-t) + \frac{\sqrt{t^2-1}}{t^2} \Leftrightarrow y = \frac{1}{t^2\sqrt{t^2-1}}x + \frac{t^2-2}{t\sqrt{t^2-1}}$$

である。 ℓ は原点 O を通るので、

$$\frac{t^2-2}{t\sqrt{t^2-1}} = 0$$

が成り立つ。 $t > 1$ のとき、 $t\sqrt{t^2-1} > 0$ であるから、

$$t^2-2=0$$

$$\therefore t = \sqrt{2} \quad (\because t > 1)$$

となる。このとき接線 ℓ の方程式は、

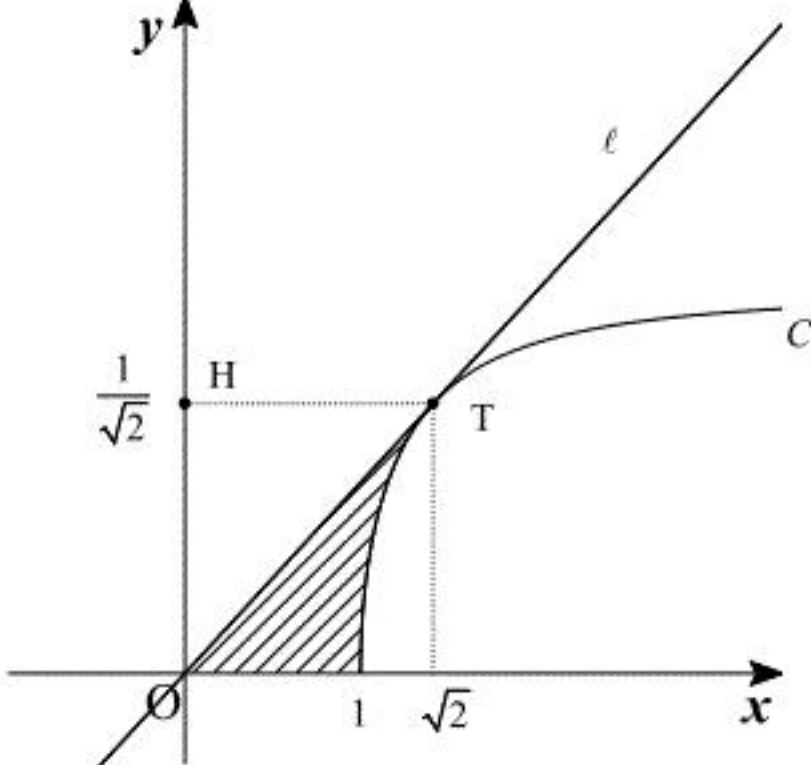
$$y = \frac{1}{2\sqrt{2-1}}x = \frac{1}{2}x$$

である。接点の座標は、 $\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ より、 $T\left(\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ となる。

(答) $\ell: y = \frac{1}{2}x$, 接点 $\left(\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

(3)

図形 D は下図の斜線部の領域である。



ここで、 $y = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$ を x について解くと

$$y^2 = \frac{x^2-1}{x^2}$$

$$\Leftrightarrow (1-y^2)x^2 = 1$$

$$\therefore x = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \quad (\because x > 0)$$

となるから、 $H\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ とし、求める面積を S とすると、

$$S = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} dy - \triangle OTH$$

である。 $y = \sin \theta$ と置換すると、 $\frac{dy}{d\theta} = \cos \theta$ であり、積分区間は以下のようになる。

y	0	$\rightarrow$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
θ	0	$\rightarrow$	$\frac{\pi}{4}$

よって、

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} dy = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 \theta}} \cdot \cos \theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta = \frac{\pi}{4}$$

となる。また、

$$\triangle OTH = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

である。したがって、

$$S = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$$

を得る。

(答) $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$

(4)

A, B の体積をそれぞれ V_a, V_b とする。求める体積はそれぞれ

$$\begin{aligned} V_a &= \int_0^{\sqrt{2}} \pi \left(\frac{1}{2}x\right)^2 dx - \int_1^{\sqrt{2}} \pi \left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\right)^2 dx \\ &= \frac{1}{4}\pi \int_0^{\sqrt{2}} x^2 dx - \pi \int_1^{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) dx \\ &= \frac{1}{4}\pi \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^{\sqrt{2}} - \pi \left[x + \frac{1}{x}\right]_1^{\sqrt{2}} \\ &= 4\pi \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} - \pi \left(\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} - 2\right) \\ &= \left(2 - \frac{4\sqrt{2}}{3}\right)\pi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_b &= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \pi \cdot \frac{1}{1-y^2} dy - \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \pi (2y)^2 dy \\ &= \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(\frac{1}{1-y} + \frac{1}{1+y}\right) dy - 4\pi \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} y^2 dy \\ &= \frac{\pi}{2} \left[-\log(1-y) + \log(1+y)\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} - 4\pi \left[\frac{1}{3}y^3\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \\ &= \frac{\pi}{2} \left\{-\log\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \log\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\} - 4\pi \cdot \frac{1}{6\sqrt{2}} \\ &= \left\{\log(1+\sqrt{2}) - \frac{\sqrt{2}}{3}\right\}\pi \end{aligned}$$

である。

(答) $A: \left(2 - \frac{4\sqrt{2}}{3}\right)\pi, B: \left\{\log(1+\sqrt{2}) - \frac{\sqrt{2}}{3}\right\}\pi$

3.

(1)

サイコロのそれぞれの目が出る確率は同様に確からしく $\frac{1}{6}$ である。 $k+1$ 回目に A がサイコロ

を投げるのは、 k 回目に A がサイコロを投げて 2 を出す場合か、 k 回目に B がサイコロを投げて 4, 5, 6 のいずれかを出す場合である。したがって、

$$P_{k+1} = \frac{1}{6}P_k + \frac{1}{2}Q_k \quad \cdots \textcircled{1}$$

である。

$$(\text{答}) \quad P_{k+1} = \frac{1}{6}P_k + \frac{1}{2}Q_k$$

(2)

$k+1$ 回目に B がサイコロを投げるのは、 k 回目に A がサイコロを投げて 3, 4, 5, 6 のいずれかを出す場合か、 k 回目に B がサイコロを投げて 2, 3 のいずれかを出す場合である。したがって、

$$Q_{k+1} = \frac{2}{3}P_k + \frac{1}{3}Q_k \quad \cdots \textcircled{2}$$

である。ここで、

$$P_{k+1} + \alpha Q_{k+1} = \beta (P_k + \alpha Q_k) \quad \cdots \textcircled{3}$$

を満たす定数 α, β の組 (α, β) を考える。①, ②より P_{k+1} と Q_{k+1} を消去すると

$$\textcircled{3} \text{の左辺} = \frac{1}{6}P_k + \frac{1}{2}Q_k + \alpha \left(\frac{2}{3}P_k + \frac{1}{3}Q_k \right) = \left(\frac{2}{3}\alpha + \frac{1}{6} \right)P_k + \left(\frac{1}{3}\alpha + \frac{1}{2} \right)Q_k$$

$$\textcircled{3} \text{の右辺} = \beta P_k + \alpha \beta Q_k$$

となるから、係数比較すると、

$$\begin{cases} \frac{2}{3}\alpha + \frac{1}{6} = \beta \\ \frac{1}{3}\alpha + \frac{1}{2} = \alpha\beta \end{cases}$$

が成り立つ。 β を消去して、

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}\alpha + \frac{1}{2} &= \alpha \left(\frac{2}{3}\alpha + \frac{1}{6} \right) \\ \Leftrightarrow 4\alpha^2 - \alpha - 3 &= 0 \\ \Leftrightarrow (\alpha - 1)(4\alpha + 3) &= 0 \\ \therefore \alpha &= 1, -\frac{3}{4} \end{aligned}$$

である。よって、 $(\alpha, \beta) = \left(1, \frac{5}{6} \right), \left(-\frac{3}{4}, -\frac{1}{3} \right)$ を得る。 $(\alpha, \beta) = \left(1, \frac{5}{6} \right)$ のとき、③は

$$P_{k+1} + Q_{k+1} = \frac{5}{6}(P_k + Q_k)$$

となる。数列 $\{P_k + Q_k\}$ は初項 $P_1 + Q_1 = 1 + 0 = 1$ 、公比 $\frac{5}{6}$ の等比数列であるから、

$$P_k + Q_k = \left(\frac{5}{6} \right)^{k-1} \quad \cdots \textcircled{4}$$

である。 $(\alpha, \beta) = \left(-\frac{3}{4}, -\frac{1}{3} \right)$ のとき、③は

$$P_{k+1} - \frac{3}{4}Q_{k+1} = -\frac{1}{3} \left(P_k - \frac{3}{4}Q_k \right)$$

となる。数列 $\left\{ P_k - \frac{3}{4}Q_k \right\}$ は初項 $P_1 - \frac{3}{4}Q_1 = 1 - \frac{3}{4} \cdot 0 = 1$ 、公比 $-\frac{1}{3}$ の等比数列であるから、

$$P_k - \frac{3}{4}Q_k = \left(-\frac{1}{3} \right)^{k-1} \quad \cdots \textcircled{5}$$

である。したがって、④と⑤を連立して解くことで、

$$P_k = \frac{3}{7} \left(\frac{5}{6} \right)^{k-1} + \frac{4}{7} \left(-\frac{1}{3} \right)^{k-1}$$

を得る。 k 回目に A が勝つには、 k 回目に A がサイコロを投げ、かつ出た目が 1 であればよい
したがって求める確率は

$$R_k = P_k \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{14} \left(\frac{5}{6} \right)^{k-1} + \frac{2}{21} \left(-\frac{1}{3} \right)^{k-1}$$

である。

$$(\text{答}) \quad R_k = \frac{1}{14} \left(\frac{5}{6} \right)^{k-1} + \frac{2}{21} \left(-\frac{1}{3} \right)^{k-1}$$

(3)

$S_n = \sum_{k=1}^n R_k$ である。 $0 < \frac{5}{6} < 1, -1 < -\frac{1}{3} < 0$ であるから、

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= \sum_{k=1}^{\infty} R_k \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{14} \left(\frac{5}{6} \right)^{k-1} + \frac{2}{21} \left(-\frac{1}{3} \right)^{k-1} \right\} \\ &= \frac{1}{14} \cdot \frac{1}{1 - \frac{5}{6}} + \frac{2}{21} \cdot \frac{1}{1 - \left(-\frac{1}{3} \right)} \\ &= \frac{1}{14} \cdot 6 + \frac{2}{21} \cdot \frac{3}{4} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{2}$$