

平成 30 年度・入学試験問題

数 学 (中)

注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
2. すべての解答用紙に受験番号を記入しなさい。
3. 答案は解答用紙の各問題番号の欄に記入しなさい。
4. 解答用紙の縦の線の右側には、受験番号以外は何も記入してはいけません。
5. 解答用紙の裏面には何も書いてはいけません。
6. 試験終了後、問題冊子および下書用紙は持ち帰りなさい。

すべての問題について、求める手順をわかりやすく説明すること。

1.  $xy$  平面上の円と放物線の共有点  $Q$  について、 $Q$  における円の接線と放物線の接線が同じとき、 $Q$  を円と放物線の接点という。

放物線  $E: y = \frac{a}{2}x^2$  ( $a$  は正の定数) と接点をもちながら動く半径  $R$  の円  $D$  ( $R$  は正の定数) を考える。ただし、円  $D$  は  $y \geq \frac{a}{2}x^2$  の表す領域を動いているとする。点  $Q\left(t, \frac{at^2}{2}\right)$  が円  $D$  と放物線  $E$  との接点となっているとき、円  $D$  の中心  $P$  の座標を  $(X, Y)$  とする。以下の問いに答えよ。

- (1)  $X, Y$  を  $t$  を用いて表せ。
- (2) 円  $D$  と放物線  $E$  が異なる 2 つの接点をもつことがあるとき、 $a$  と  $R$  が満たす条件を求めよ。また、そのときの 2 つの接点の座標を求めよ。
- (3)  $t$  のとりうる値の範囲を求めよ。
- (4)  $Y$  を  $X$  の関数と考える。このとき、 $\frac{dY}{dX}$  (ただし  $X \neq 0$ ) を  $t$  を用いて表し、

$$\lim_{X \rightarrow 0+0} \left( \frac{dY}{dX} \right) - \lim_{X \rightarrow 0-0} \left( \frac{dY}{dX} \right) \text{ を求めよ。}$$

2. 関数  $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x}$  ( $x \geq 1$ ) と曲線  $C: y = f(x)$  について、以下の問いに答えよ。

- (1)  $x \geq 1$  において  $f(x)$  が単調増加であることを示せ。また、曲線  $C$  は上に凸であることを示せ。
- (2) 曲線  $C$  の接線で原点を通るものを  $\ell$  とする。このとき、 $\ell$  の方程式を求めよ。また、 $C$  と  $\ell$  の接点を求めよ。
- (3) 曲線  $C$  と接線  $\ell$  および  $x$  軸で囲まれた図形  $D$  の面積を求めよ。
- (4)  $D$  を  $x$  軸のまわりに 1 回転してできる立体を  $A$  とし、 $D$  を  $y$  軸のまわりに 1 回転してできる立体を  $B$  とする。 $A$  と  $B$  の体積をそれぞれ求めよ。

3. 1 から 6 までの数字が書かれたサイコロ 1 個を使って, A, B の 2 人がゲームを行う。ゲームは次のようなルールでサイコロを投げあい, 先に 1 を出した方を勝ちとして終了する。

- (i) A がまず 1 回目にサイコロを投げる。
- (ii) A がサイコロを投げて, 1, 2 以外が出たときは, 次の回は交代して B がサイコロを投げる。
- (iii) A がサイコロを投げて, 2 が出たときには, 次の回も続けて A がサイコロを投げる。
- (iv) B がサイコロを投げて, 1, 2, 3 以外が出たときは, 次の回は交代して A がサイコロを投げる。
- (v) B がサイコロを投げて, 2 か 3 が出たときには, 次の回も続けて B がサイコロを投げる。

以下の問いに答えよ。

- (1)  $k$  回目に A がサイコロを投げる確率を  $P_k$ , B が投げる確率を  $Q_k$  とする。 $P_{k+1}$  を  $P_k$  と  $Q_k$  を用いて表せ。
- (2)  $k$  回目に A がサイコロを投げて勝つ確率を  $R_k$  とする。 $R_k$  を  $k$  を用いて表せ。
- (3)  $n$  回目までに A が勝つ確率を  $S_n$  とする。 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  を求めよ。

