

平成 30 年度・入学試験問題

数 学 (中)

注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
2. すべての解答用紙に受験番号を記入しなさい。
3. 答案は解答用紙の各問題番号の欄に記入しなさい。
4. 解答用紙の縦の線の右側には、受験番号以外は何も記入してはいけません。
5. 解答用紙の裏面には何も書いてはいけません。
6. 試験終了後、問題冊子および下書き用紙は持ち帰りなさい。

すべての問題について、求める手順をわかりやすく説明すること。

1. xy 平面上の円と放物線の共有点 Q について, Q における円の接線と放物線の接線が同じとき, Q を円と放物線の接点という。

放物線 $E: y = \frac{a}{2}x^2$ (a は正の定数) と接点をもちらがら動く半径 R の円 D (R は正の定数) を考える。ただし, 円 D は $y \geq \frac{a}{2}x^2$ の表す領域を動いているとする。点 $Q\left(t, \frac{at^2}{2}\right)$ が円 D と放物線 E との接点となっているとき, 円 D の中心 P の座標を (X, Y) とする。以下の問い合わせに答えよ。

- (1) X, Y を t を用いて表せ。
- (2) 円 D と放物線 E が異なる 2 つの接点をもつことがあるとき, a と R が満たす条件を求めよ。また, そのときの 2 つの接点の座標を求めよ。
- (3) t のとりうる値の範囲を求めよ。
- (4) Y を X の関数と考える。このとき, $\frac{dY}{dX}$ (ただし $X \neq 0$) を t を用いて表し, $\lim_{x \rightarrow 0+0} \left(\frac{dY}{dX} \right) - \lim_{x \rightarrow 0-0} \left(\frac{dY}{dX} \right)$ を求めよ。

2. 関数 $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x}$ ($x \geq 1$) と曲線 $C: y = f(x)$ について, 以下の問い合わせに答えよ。

- (1) $x \geq 1$ において $f(x)$ が単調増加であることを示せ。また, 曲線 C は上に凸であることを示せ。
- (2) 曲線 C の接線で原点を通るものを ℓ とする。このとき, ℓ の方程式を求めよ。また, C と ℓ の接点を求めよ。
- (3) 曲線 C と接線 ℓ および x 軸で囲まれた図形 D の面積を求めよ。
- (4) D を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体を A とし, D を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体を B とする。 A と B の体積をそれぞれ求めよ。

3. 1 から 6 までの数字が書かれたサイコロ 1 個を使って、A, B の 2 人がゲームを行う。ゲームは次のようなルールでサイコロを投げあい、先に 1 を出した方を勝ちとして終了する。

- (i) A がまず 1 回目にサイコロを投げる。
- (ii) A がサイコロを投げて、1, 2 以外が出たときは、次の回は交代して B がサイコロを投げる。
- (iii) A がサイコロを投げて、2 が出たときには、次の回も続けて A がサイコロを投げる。
- (iv) B がサイコロを投げて、1, 2, 3 以外が出たときは、次の回は交代して A がサイコロを投げる。
- (v) B がサイコロを投げて、2 か 3 が出たときには、次の回も続けて B がサイコロを投げる。

以下の問いに答えよ。

- (1) k 回目に A がサイコロを投げる確率を P_k , B が投げる確率を Q_k とする。 P_{k+1} を P_k と Q_k を用いて表せ。
- (2) k 回目に A がサイコロを投げて勝つ確率を R_k とする。 R_k を k を用いて表せ。
- (3) n 回目までに A が勝つ確率を S_n とする。 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ を求めよ。

