

1.

(1)

$x > 0$ のとき, $\frac{2}{x} > 0$ である。また, $\log x$ の正負について, $x \geq 1$ のとき, $\log x \geq 0$, $0 < x < 1$

のとき, $\log x < 0$ である。以上より, $x \geq 1$ のとき, $f(x) \geq 0$, $0 < x < 1$ のとき, $f(x) < 0$ となる。ここで, 曲線 $y = f(x)$ と x 軸, 直線 $x = a$, $x = 2a$ で囲まれた部分の面積 $S(a)$ を求めるに当たって, a , $2a$ と 1 の大小で場合分けを行う。

[1] $(0 <) 2a < 1 \Leftrightarrow 0 < a < \frac{1}{2}$ のとき

$a < x < 2a$ において $f(x) < 0$ となるから,

$$\begin{aligned} S(a) &= -\int_a^{2a} \frac{2}{x} \log x dx \\ &= -\left[(\log x)^2\right]_a^{2a} \\ &= -2(\log 2)(\log a) - (\log 2)^2 \end{aligned}$$

となる。

[2] $a < 1 \leq 2a \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq a < 1$ のとき

$a < x < 1$ では $f(x) < 0$, $1 \leq x < 2a$ では $f(x) \geq 0$ となるから,

$$\begin{aligned} S(a) &= -\int_a^1 \frac{2}{x} \log x dx + \int_1^{2a} \frac{2}{x} \log x dx \\ &= -\left[(\log x)^2\right]_a^1 + \left[(\log x)^2\right]_1^{2a} \\ &= (\log 2a)^2 + (\log a)^2 \end{aligned}$$

となる。

[3] $1 \leq a$ のとき

$a < x < 2a$ において $f(x) > 0$ となるから,

$$\begin{aligned} S(a) &= \int_a^{2a} \frac{2}{x} \log x dx \\ &= \left[(\log x)^2\right]_a^{2a} \\ &= 2(\log 2)(\log a) + (\log 2)^2 \end{aligned}$$

となる。

以上, [1], [2], [3] より,

$$S(a) = \begin{cases} -2(\log 2)(\log a) - (\log 2)^2 & (a < \frac{1}{2} \text{ のとき}) \\ (\log 2a)^2 + (\log a)^2 & (\frac{1}{2} \leq a < 1 \text{ のとき}) \\ 2(\log 2)(\log a) + (\log 2)^2 & (1 \leq a \text{ のとき}) \end{cases}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad S(a) = \begin{cases} -2(\log 2)(\log a) - (\log 2)^2 & (a < \frac{1}{2} \text{ のとき}) \\ (\log 2a)^2 + (\log a)^2 & (\frac{1}{2} \leq a < 1 \text{ のとき}) \\ 2(\log 2)(\log a) + (\log 2)^2 & (1 \leq a \text{ のとき}) \end{cases}$$

(2)

まず, $\log a$ は a について単調増加するから, a を変化させたときの $S(a)$ の増減と $\log a$ を変化させたときの $S(a)$ の増減は一致する。 $a < \frac{1}{2}$ のとき, $-2(\log 2) < 0$ であるから, $S(a)$ は単調減少する。 $1 \leq a$ のとき, $2(\log 2) > 0$ であるから, $S(a)$ は単調増加する。よって, $S(a)$ が最小値をもつのは $\frac{1}{2} \leq a \leq 1$ の区間である。 $\frac{1}{2} \leq a \leq 1$ において,

$$\begin{aligned} S(a) &= (\log 2a)^2 + (\log a)^2 \\ &= (\log a + \log 2)^2 + (\log a)^2 \\ &= 2\left(\log a + \frac{1}{2}\log 2\right)^2 + \frac{1}{2}(\log 2)^2 \end{aligned}$$

となるから, これは $\log a = -\frac{1}{2}\log 2 \Leftrightarrow a = \frac{\sqrt{2}}{2}$ のときに最小値 $S\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2}(\log 2)^2$ をとる。これ

は, $\frac{1}{2} \leq \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$ をみたすから, 適切である。以上より, $S(a)$ が最小となるときの a の値は $\frac{\sqrt{2}}{2}$

であり, そのとき $S(a) = \frac{1}{2}(\log 2)^2$ となる。

$$(\text{答}) \quad a = \frac{\sqrt{2}}{2}, S(a) = \frac{1}{2}(\log 2)^2$$

2.

(1)

条件①, ②, ③より, m, n を 0 でない整数として,

$$\frac{\vec{p} \cdot \vec{q}}{\vec{p} \cdot \vec{p}} = m, \frac{4\vec{p} \cdot \vec{q}}{\vec{q} \cdot \vec{q}} = n$$

とおくことができる。また,

$$\vec{p} \cdot \vec{q} = |\vec{p}| |\vec{q}| \cos \theta$$

である。これを $\frac{\vec{p} \cdot \vec{q}}{\vec{p} \cdot \vec{p}} = m$ に代入すると,

$$\frac{|\vec{q}|}{|\vec{p}|} \cos \theta = m$$

となり, $\frac{4\vec{p} \cdot \vec{q}}{\vec{q} \cdot \vec{q}} = n$ に代入すると,

$$\frac{|\vec{q}|}{|\vec{p}|} = \frac{4 \cos \theta}{n}$$

となる。よって,

$$\frac{4 \cos \theta}{n} \cdot \cos \theta = m \Leftrightarrow \cos^2 \theta = \frac{mn}{4}$$

となる。 $0 \leq \cos^2 \theta \leq 1$ であることより, $0 \leq mn \leq 4$ となり, m, n が 0 でない整数であることから, $mn = 1, 2, 3, 4$ となる。このとき,

$$\cos^2 \theta = \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1 \Leftrightarrow \cos \theta = \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{\sqrt{2}}{2}, \pm \frac{\sqrt{3}}{2}, \pm 1$$

であるから, $0 \leq \theta \leq \pi$ において

$$\theta = 0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}, \pi$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \theta = 0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}, \pi$$

(2)

(1)より $\frac{|\vec{q}|}{|\vec{p}|} = \frac{m}{\cos \theta}$ である。 $\cos \theta$ の値ごとに場合分けをする。

[1] $\theta = 0, \pi$ のとき

$mn = 4$ であるから, m, n の組み合わせは

$$(m, n) = (\pm 1, \pm 4), (\pm 2, \pm 2), (\pm 4, \pm 1) \quad (\text{複号同順})$$

となる。よって, $\cos \theta = \pm 1$ であるから

$$\frac{|\vec{q}|}{|\vec{p}|} = 1, 2, 4$$

となる。

[2] $\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$ のとき

$mn = 3$ であるから, m, n の組み合わせは

$$(m, n) = (\pm 1, \pm 3), (\pm 3, \pm 1) \quad (\text{複号同順})$$

となる。よって, $\cos \theta = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$ であるから

$$\frac{|\vec{q}|}{|\vec{p}|} = \frac{2\sqrt{3}}{3}, 2\sqrt{3}$$

となる。

[3] $\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$ のとき

$mn = 2$ であるから, m, n の組み合わせは

$$(m, n) = (\pm 1, \pm 2), (\pm 2, \pm 1) \quad (\text{複号同順})$$

となる。よって, $\cos \theta = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ であるから

$$\frac{|\vec{q}|}{|\vec{p}|} = \sqrt{2}, 2\sqrt{2}$$

となる。

[4] $\theta = \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$ のとき

$mn = 1$ であるから, m, n の組み合わせは

$$(m, n) = (\pm 1, \pm 1) \quad (\text{複号同順})$$

となる。よって, $\cos \theta = \pm \frac{1}{2}$ であるから

$$\frac{|\vec{q}|}{|\vec{p}|} = 2$$

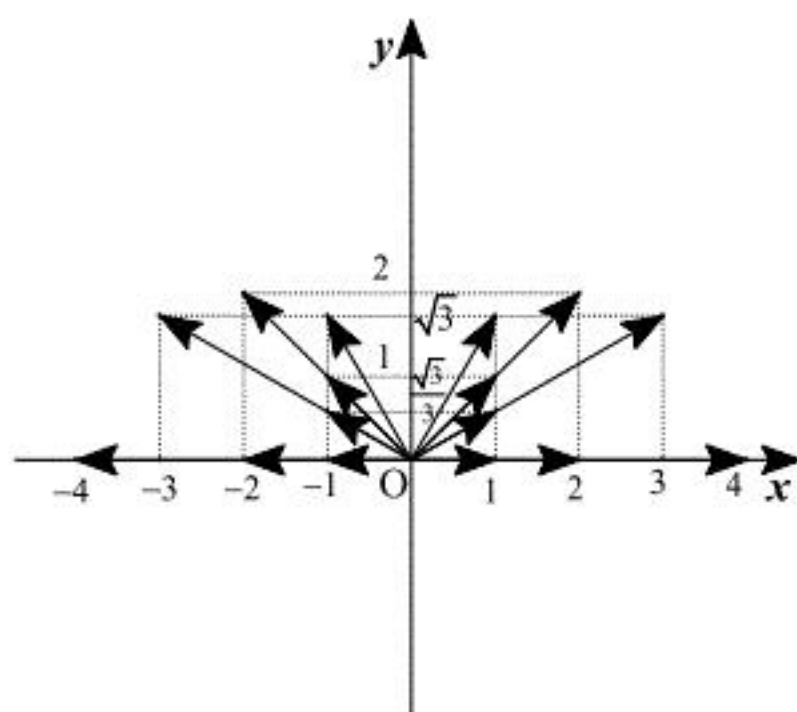
となる。

以上, [1], [2], [3], [4]をまとめると答えになる。

$$(\text{答}) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \theta = 0, \pi \text{ のとき} & |\vec{p}| : |\vec{q}| = 1:1, 1:2, 1:4 \\ \theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \text{ のとき} & |\vec{p}| : |\vec{q}| = 1:\frac{2\sqrt{3}}{3}, 1:2\sqrt{3} \\ \theta = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \text{ のとき} & |\vec{p}| : |\vec{q}| = 1:\sqrt{2}, 1:2\sqrt{2} \\ \theta = \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3} \text{ のとき} & |\vec{p}| : |\vec{q}| = 1:2 \end{array} \right.$$

(3)

(2)より, 考えられる $\vec{q}$ を全て図示すると以下の図のようになる。



3.

(1)

図形が3点を頂点とする三角形となるのは、最初の3回では全て違う目が出た後、 i_4 が i_1 と一致し、そこでサイコロを投げるのをやめるときであるから、求める確率は、

$$\frac{{}_6P_3 \cdot 1}{6^4} = \frac{5}{54}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{5}{54}$$

(2)

点 $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ は全て単位円上に存在し、線分 A_2A_5 のみが2点をつなげたときにその単位円の直径を表せるから、図形が3点を頂点と直角三角形となるときの斜辺は線分 A_2A_5 である。つまり最初の3回では2と5を含む3種類の違う目が出た後、 i_4 が i_1 と一致すればよい。2と5を含む3種類の違う目の組み合わせは2と5以外の目が何であるかで4通りあり、それぞれについて目の出る順番は3!通りあることから、求める確率は、

$$\frac{4 \cdot 3! \cdot 1}{6^4} = \frac{1}{54}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{1}{54}$$

(3)

直角三角形を作図した段階で作図は終了するから、直角三角形の頂点以外の点が図形に含まれるとしたら結ばれるのは直角三角形を描く前になる。直角三角形の頂点以外の点で図形に含まれる点の個数によって場合分けをする。

[1] 0個のとき

図形が直角三角形だけになるから、(2)より確率は

$$\frac{1}{54}$$

である。

[2] 1個のとき

直角三角形の頂点でない3点のうちどれが最初に結ばれるかを考えると、確率は

$$\frac{3}{6} \cdot \frac{1}{54} = \frac{1}{108}$$

である。

[3] 2個のとき

直角三角形の頂点でない3点のうちどの2点が最初に順に結ばれるかを考えると、確率は

$$\frac{{}_3P_2}{6^2} \cdot \frac{1}{54} = \frac{1}{324}$$

である。

[4] 3個のとき

直角三角形の頂点でない3点がどの順番で結ばれるかを考えると、確率は

$$\frac{3!}{6^3} \cdot \frac{1}{54} = \frac{1}{1944}$$

である。

以上、[1], [2], [3], [4]より、求める確率は、

$$\frac{1}{54} + \frac{1}{108} + \frac{1}{324} + \frac{1}{1944} = \frac{61}{1944}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{61}{1944}$$

4.

(1)

数列 $\{a_n\}$ を順に求め、 $a_{n+1} = n$ となる項が先頭となるように

$$1, 0, |2, 1, 0, |5, 4, 3, 2, 1, 0, |11, 10, \dots$$

と $\{a_n\}$ を群分けし、第 m 群の先頭の項を b_m とおく。 $m \geq 2$ とする。第 m 群は

$$\{b_m, b_m - 1, \dots, 1, 0\}$$

となるから、第 m 群の項数は $b_m + 1$ である。さらに、第 m 群の先頭の項 b_m は第 1 群から第 $m-1$ 群までの項数の総和と一致するから、第 1 群から第 $m-1$ 群までの項数の総和は b_m である。よって、第 1 群から第 m 群までの項数の総和を考えると、

$$\begin{aligned} b_{m+1} &= b_m + 1 + b_m \\ &= 2b_m + 1 \end{aligned}$$

となる。 $b_2 = 2$ であるから、式変形して解くと、

$$\begin{aligned} b_{m+1} + 1 &= 2(b_m + 1) \\ b_m + 1 &= 2^{m-2}(b_2 + 1) \\ b_m &= 3 \cdot 2^{m-2} - 1 \end{aligned}$$

となる。ただし $m \geq 2$ である。 b_m が初めて 10000 以上となるのは、 $b_{13} = 6143$, $b_{14} = 12287$ より $m = 14$ のときである。よって、 $a_n = 10000$ に初めてなるのは第 14 群の 2288 項目であり、そのとき、

$$n = 12287 + 2288 = 14575$$

となる。

(答) $n = 14575$

(2)

$m \geq 2$ のときの第 m 群の項の和は

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{b_m} k &= \frac{1}{2} b_m (b_m + 1) \\ &= \frac{3}{2} (3 \cdot 4^{m-2} - 2^{m-2}) \end{aligned}$$

である。よって、第 1 群から第 m 群までの項の総和は、第 1 群の項の和が 1 であるから、

$$\begin{aligned} 1 + \sum_{k=2}^m \frac{3}{2} (3 \cdot 4^{k-2} - 2^{k-2}) &= 1 + \frac{9}{2} \cdot \frac{4^{m-1} - 4^0}{4-1} - \frac{3}{2} \cdot \frac{2^{m-1} - 2^0}{2-1} \\ &= 1 + \frac{3}{2} (4^{m-1} - 2^{m-1}) \end{aligned}$$

となる。これは $m = 1$ のときも成り立つ。 $S_n \geq 10000$ となる最小の n が第 $m+1$ 群に属しているとする、

$$\begin{aligned} 1 + \frac{3}{2} (4^{7-1} - 2^{7-1}) &< 10000 \leq 1 + \frac{3}{2} (4^7 - 2^7) \\ \Leftrightarrow 6049 &< 10000 \leq 24385 \end{aligned}$$

であるから、 $m = 7$ となる。第 1 群から第 7 群までの項の総和は、

$$1 + \frac{3}{2} (4^{7-1} - 2^{7-1}) = 6049$$

であるから、第 8 群の第 1 項からの総和が $10000 - 6049 = 3951$ 以上となることを求めればよい。また、

$$b_8 = 3 \cdot 2^{8-2} - 1 = 191$$

である。よって、第 8 群の第 1 項から第 t 項までの総和は

$$\sum_{k=1}^t (192 - k) = 192t - \frac{1}{2} t(t+1)$$

となるから、これが 3951 以上となるのは、 $t = 21$ のとき 3801, $t = 22$ のとき 3971 であることより $t = 22$ のときである。以上より求める n について a_n は第 8 群の 22 項目であるから、

$$n = 191 + 22 = 213$$

となる。

(答) $n = 213$