

1.

(1)

条件を満たすのは $x^2 - y - 1$, $x - y + 1$, $y - 1$ のうち「2つが正で、1つが負」または、「3つすべてが負」のいずれかの場合である。つまり以下の4パターンである。

$$[1] \quad x^2 - y - 1 > 0, x - y + 1 > 0, y - 1 < 0$$

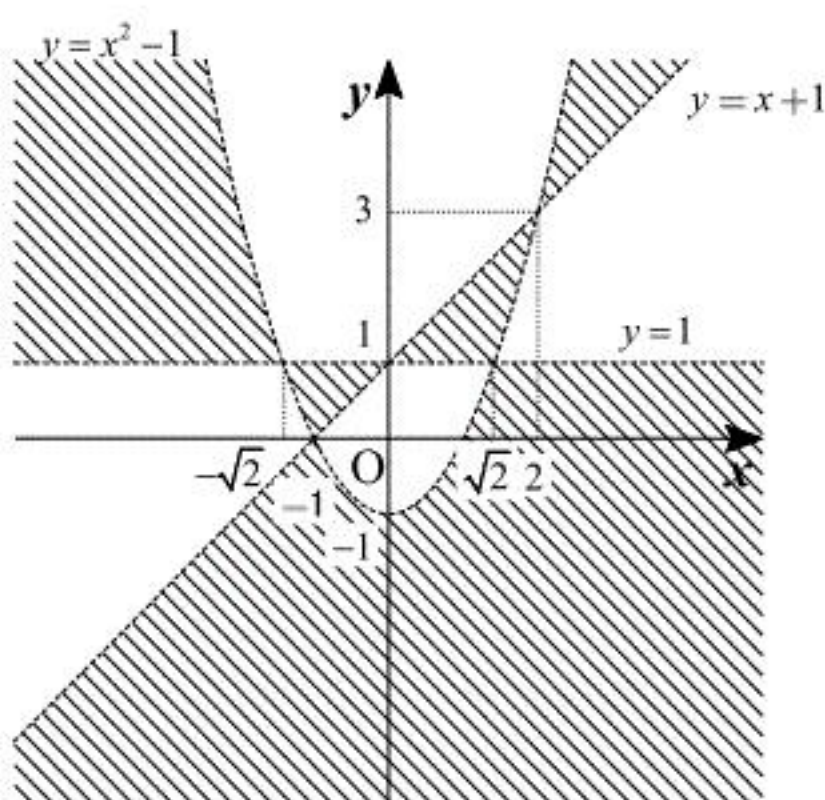
$$[2] \quad x^2 - y - 1 > 0, x - y + 1 < 0, y - 1 > 0$$

$$[3] \quad x^2 - y - 1 < 0, x - y + 1 > 0, y - 1 > 0$$

$$[4] \quad x^2 - y - 1 < 0, x - y + 1 < 0, y - 1 < 0$$

$x^2 - y - 1 = 0$, $x - y + 1 = 0$ の交点は $(2, 3)$, $(-1, 0)$ である。 $x^2 - y - 1 = 0$, $y - 1 = 0$ の交点は

$(\sqrt{2}, 1)$, $(-\sqrt{2}, 1)$ である。 $y - 1 = 0$, $x - y + 1 = 0$ の交点は $(0, 1)$ である。[1], [2], [3], [4] を図示すると下図の斜線部のようになる。ただし境界は含まない。



(答) 前図の斜線部(ただし境界は含まない)

(2)

$f'(x) = -3x^2 + 2ax - 11$ であるから、

$$f'(-2) = -51$$

$$\Leftrightarrow -3 \cdot (-2)^2 + 2a \cdot (-2) - 11 = -51$$

$$\Leftrightarrow -4a = -28$$

$$\Leftrightarrow a = 7$$

となる。よって、 $f(x) = -x^3 + 7x^2 - 11x + 5$ である。ここで、 $f(x) = 0$ を解くと、

$$-(x-1)^2(x-5) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 1, 5$$

となる。重解 $x = 1$ を持つことより、 $y = f(x)$ は $x = 1$ で x 軸と接し、 x^3 の係数が負である3次関数であるから、求める面積を S とおくと、

$$\begin{aligned} S &= \int_1^5 (-x^3 + 7x^2 - 11x + 5) dx \\ &= \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{7}{3}x^3 - \frac{11}{2}x^2 + 5x \right]_1^5 \\ &= \left(-\frac{1}{4} \cdot 5^4 + \frac{7}{3} \cdot 5^3 - \frac{11}{2} \cdot 5^2 + 5 \cdot 5 \right) - \left(-\frac{1}{4} \cdot 1^4 + \frac{7}{3} \cdot 1^3 - \frac{11}{2} \cdot 1^2 + 5 \cdot 1 \right) \\ &= \frac{64}{3} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{64}{3}$

(3)

国語の平均が b であることより、

$$\frac{1}{8}(50 + 53 + 60 + 71 + 81 + a + 65 + 75) = b$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{8}(455 + a) = b \quad \dots \textcircled{1}$$

となる。数学と国語の点数の共分散 S_{xy} は

$$\begin{aligned} S_{xy} &= \frac{1}{8} \{ (47-71)(50-b) + (56-71)(53-b) + (81-71)(60-b) + (75-71)(71-b) \\ &\quad + (84-71)(81-b) + (66-71)(a-b) + (67-71)(65-b) + (92-71)(75-b) \} \\ &= \frac{1}{8} \{ -24(50-b) - 15(53-b) + 10(60-b) + 4(71-b) \\ &\quad + 13(81-b) - 5(a-b) - 4(65-b) + 21(75-b) \} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{8}(1257 - 5a) \quad \dots \textcircled{2}$$

となる。数学と国語の点数の相関係数が 0.85 であることと、②より

$$\begin{aligned} \frac{\frac{1}{8}(1257 - 5a)}{\sqrt{196} \cdot \sqrt{100}} &= 0.85 \\ \Leftrightarrow 1257 - 5a &= 952 \\ \Leftrightarrow a &= 61 \quad \dots \textcircled{3} \end{aligned}$$

が成り立つ。③を①に代入すると、

$$\begin{aligned} b &= \frac{1}{8}(455 + 61) \\ &= 64.5 \end{aligned}$$

となる。

(答) $a = 61, b = 64.5$

2.

(1)

$S_n(x)$ は初項 $\log_3 x$ 、公比 -3 の等比数列の初項から第 n 項の和であるから、

$$S_n(x) = \log_3 x \cdot \frac{1 - (-3)^n}{1 - (-3)} = \frac{\log_3 x}{4} \{1 - (-3)^n\}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{\log_3 x}{4} \{1 - (-3)^n\}$$

(2)

真数条件より、

$$\begin{aligned} 3x^2 - x - 1 &> 0 \\ \Leftrightarrow \left(x - \frac{1 - \sqrt{13}}{6}\right) \left(x - \frac{1 + \sqrt{13}}{6}\right) &> 0 \\ \Leftrightarrow x < \frac{1 - \sqrt{13}}{6}, \frac{1 + \sqrt{13}}{6} < x \end{aligned}$$

であるから、 x が正の実数であることと合わせて、 $f(x)$ の定義域は、

$$x > \frac{1 + \sqrt{13}}{6} \quad \dots \textcircled{1}$$

である。この下で、

$$\begin{aligned} \log_3 (3x^2 - x - 1) &> 1 \\ \Leftrightarrow 3x^2 - x - 1 &> 3 \\ \Leftrightarrow 3x^2 - x - 4 &> 0 \\ \Leftrightarrow (3x - 4)(x + 1) &> 0 \\ \Leftrightarrow x < -1, \frac{4}{3} < x \end{aligned}$$

$$\therefore x > \frac{4}{3} \quad (\because \textcircled{1})$$

となる。

$$(\text{答}) \quad x > \frac{4}{3}$$

(3)

n は自然数なので、 $\cos n\pi = (-1)^n$ となる。これと(1)より、

$$\begin{aligned} \frac{\log_3 x}{4} \{1 - (-3)^n\} &> \frac{1 - 3^n \cos n\pi}{12} \log_3 (3x^2 - x - 1) \\ \Leftrightarrow 3 \{1 - (-3)^n\} \log_3 x &> \{1 - 3^n \cdot (-1)^n\} \log_3 (3x^2 - x - 1) \\ \Leftrightarrow \{1 - (-3)^n\} \log_3 x^3 &> \{1 - (-3)^n\} \log_3 (3x^2 - x - 1) \quad \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

である。

[1] n が奇数のとき

$1 - (-3)^n = 1 + 3^n (> 0)$ より、 $\textcircled{1}$ の下で、 $\textcircled{2}$ は、

$$\begin{aligned} \log_3 x^3 &> \log_3 (3x^2 - x - 1) \\ \Leftrightarrow x^3 &> 3x^2 - x - 1 \\ \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + x + 1 &> 0 \\ \Leftrightarrow (x - 1) \{x - (1 + \sqrt{2})\} \{x - (1 - \sqrt{2})\} &> 0 \\ \Leftrightarrow 1 - \sqrt{2} < x < 1, 1 + \sqrt{2} < x \\ \therefore \frac{1 + \sqrt{13}}{6} < x < 1, 1 + \sqrt{2} < x & (\because \textcircled{1}) \end{aligned}$$

となる。

[2] n が偶数のとき

$1 - (-3)^n = 1 - 3^n (< 0)$ より、 $\textcircled{1}$ の下で、 $\textcircled{2}$ は、

$$\begin{aligned} \log_3 x^3 &< \log_3 (3x^2 - x - 1) \\ \Leftrightarrow x^3 &< 3x^2 - x - 1 \\ \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + x + 1 &< 0 \\ \Leftrightarrow (x - 1) \{x - (1 + \sqrt{2})\} \{x - (1 - \sqrt{2})\} &< 0 \\ \Leftrightarrow x < 1 - \sqrt{2}, 1 < x < 1 + \sqrt{2} \\ \therefore 1 < x < 1 + \sqrt{2} & (\because \textcircled{1}) \end{aligned}$$

となる。

以上[1], [2]より、 n が奇数のとき $\frac{1 + \sqrt{13}}{6} < x < 1, 1 + \sqrt{2} < x$ となり、 n が偶数のとき

$1 < x < 1 + \sqrt{2}$ となる。

$$(\text{答}) \quad \begin{cases} \frac{1 + \sqrt{13}}{6} < x < 1, 1 + \sqrt{2} < x & (n \text{ は奇数}) \\ 1 < x < 1 + \sqrt{2} & (n \text{ は偶数}) \end{cases}$$

3.

(1)

①より整数を n とおくと、

$$\frac{\vec{p} \cdot \vec{q}}{\vec{p} \cdot \vec{p}} = \frac{|\vec{p}| |\vec{q}| \cos \theta}{|\vec{p}|^2} = n$$

となる。②より整数を m とおくと、

$$\frac{(2\vec{p}) \cdot (2\vec{q})}{\vec{q} \cdot \vec{q}} = \frac{4|\vec{p}| |\vec{q}| \cos \theta}{|\vec{q}|^2} = m$$

となる。これらを辺々かけて、

$$\begin{aligned} 4 \cos^2 \theta &= mn \\ \Leftrightarrow \cos^2 \theta &= \frac{mn}{4} \end{aligned}$$

となる。③より、 $\cos \theta \neq 0$ なので、 $0 < \cos^2 \theta \leq 1$ となる。これと n, m は整数であることから、

$$\begin{aligned} \cos^2 \theta &= \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1 \\ \Leftrightarrow \cos \theta &= \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{\sqrt{2}}{2}, \pm \frac{\sqrt{3}}{2}, \pm 1 \\ \therefore \theta &= 0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}, \pi \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \theta = 0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}, \pi$$

(2)

(1)より $\frac{n}{m} = \frac{|\vec{q}|^2}{4|\vec{p}|^2} \Leftrightarrow \frac{|\vec{p}|}{|\vec{q}|} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{m}{n}}$ となる。以下、 θ で場合分けする。

[1] $\theta = 0, \pi$ のとき

$\cos^2 \theta = 1$ より、 $nm = 4$ となる。よって、 $(n, m) = (\pm 4, \pm 1), (\pm 2, \pm 2), (\pm 1, \pm 4)$ (複合同順)

となる。よって、 $\frac{m}{n} = \frac{1}{4}, 1, 4$ となるから、

$$\begin{aligned} \frac{|\vec{p}|}{|\vec{q}|} &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{4}}, \frac{1}{2} \sqrt{1}, \frac{1}{2} \sqrt{4} \\ &= \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1 \end{aligned}$$

となる。

[2] $\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$ のとき

$\cos^2 \theta = \frac{3}{4}$ より、 $nm = 3$ となる。よって、 $(n, m) = (\pm 3, \pm 1), (\pm 1, \pm 3)$ (複合同順) となる。

よって、 $\frac{m}{n} = \frac{1}{3}, 3$ となるから、

$$\begin{aligned} \frac{|\vec{p}|}{|\vec{q}|} &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{3}}, \frac{1}{2} \sqrt{3} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

となる。

[3] $\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$ のとき

$\cos^2 \theta = \frac{1}{2}$ より、 $nm = 2$ となる。よって、 $(n, m) = (\pm 2, \pm 1), (\pm 1, \pm 2)$ (複合同順) となる。

よって、 $\frac{m}{n} = \frac{1}{2}, 2$ となるから、

$$\begin{aligned} \frac{|\vec{p}|}{|\vec{q}|} &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}}, \frac{1}{2} \sqrt{2} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

となる。

[4] $\theta = \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$ のとき

$\cos^2 \theta = \frac{1}{4}$ より、 $nm = 1$ となる。よって、 $(n, m) = (\pm 1, \pm 1)$ (複合同順) となる。よって、

$\frac{m}{n} = 1$ となるから、

$$\begin{aligned} \frac{|\vec{p}|}{|\vec{q}|} &= \frac{1}{2} \sqrt{1} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

となる。

以上、[1], [2], [3], [4]より

$$\theta = 0, \pi \text{ のとき } \frac{|\vec{p}|}{|\vec{q}|} = \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1$$

$$\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \text{ のとき } \frac{|\vec{p}|}{|\vec{q}|} = \frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \text{ のとき } \frac{|\vec{p}|}{|\vec{q}|} = \frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\theta = \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3} \text{ のとき } \frac{|\vec{p}|}{|\vec{q}|} = \frac{1}{2}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \begin{cases} \frac{|\vec{p}|}{|\vec{q}|} = \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1 \quad (\theta = 0, \pi) \\ \frac{|\vec{p}|}{|\vec{q}|} = \frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \left(\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \right) \\ \frac{|\vec{p}|}{|\vec{q}|} = \frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \left(\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \right) \\ \frac{|\vec{p}|}{|\vec{q}|} = \frac{1}{2} \quad \left(\theta = \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3} \right) \end{cases}$$

(3)

$|\vec{p}| = 1$ であり、 $0 \leq \theta \leq \pi, q_2 \geq 0$ より

$$\begin{cases} q_1 = \frac{|\vec{q}|}{|\vec{p}|} \cos \theta \\ q_2 = \frac{|\vec{q}|}{|\vec{p}|} \sin \theta \end{cases}$$

となる。(2)の場合分けに沿って考えていく。

[1] $\theta = 0, \pi$ のとき

$\frac{|\vec{p}|}{|\vec{q}|} = \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1$ より、 $(q_1, q_2) = (\pm 4, 0), (\pm 2, 0), (\pm 1, 0)$ となる。

[2] $\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$ のとき

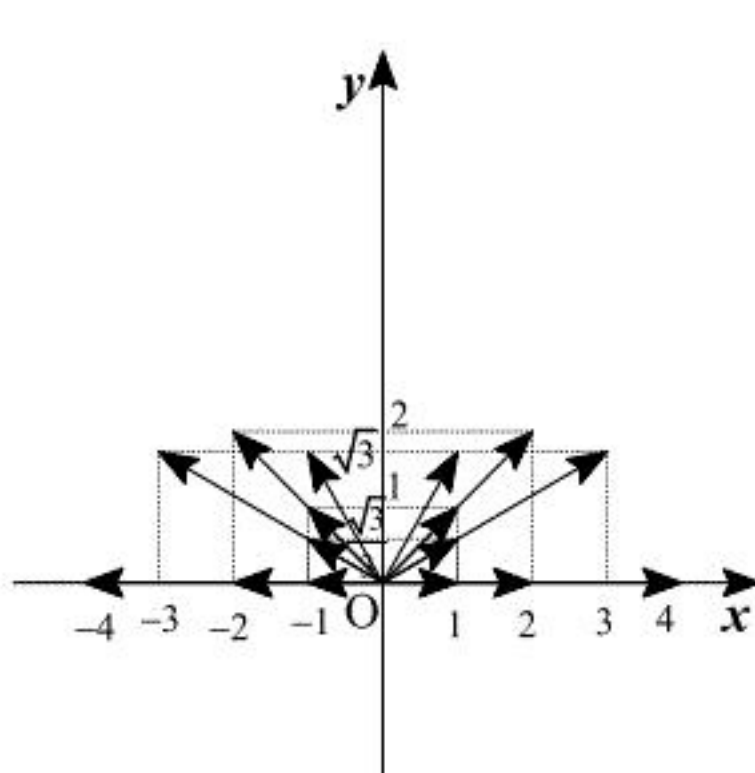
$\frac{|\vec{p}|}{|\vec{q}|} = \frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{\sqrt{3}}{2}$ より、 $(q_1, q_2) = (\pm 3, \sqrt{3}), \left(\pm 1, \frac{\sqrt{3}}{3} \right)$ となる。

[3] $\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$ のとき

$\frac{|\vec{p}|}{|\vec{q}|} = \frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}$ より、 $(q_1, q_2) = (\pm 2, 2), (\pm 1, 1)$ となる。

[4] $\theta = \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$ のとき

$\frac{|\vec{p}|}{|\vec{q}|} = \frac{1}{2}$ より、 $(q_1, q_2) = (\pm 1, \sqrt{3})$ となる。



(答) 前図

4.

(1)

できる図形は三角形より，出る目の数字は3種類である。1, 2, 3回目に出る目を a, b, c とおくと， A_a, A_b, A_c がそれぞれ線分で結ばれていなければならない。つまり， a, b, c は異なる数であり，4回目に出る目は， a であればよい。よって，求める確率は

$$\frac{6}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{54}$$

となる。

(答) $\frac{5}{54}$

(2)

2点を結んだ線分が原点を通る組み合わせは， (A_2, A_5) のみである。よって，直角三角形を作れる3点の組み合わせは， A_2 と A_5 とその他のもう1点である。(1)と同様に出る目の数字は3種類であり，1, 2, 3回目に出る目を a, b, c とおくと， A_a, A_b, A_c がそれぞれ線分で結ばれていなければならない。4回目に出る目は， a であればよい。以上より， a, b, c のうち2つは2, 5であり，残りの数は2, 5以外の数であり，残りの数の選び方は4通りであるから，求める確率は，

$$4 \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{54}$$

となる。

(答) $\frac{1}{54}$

(3)

直角三角形ができるのは(2)より4回以上サイコロを投げたときである。また，①よりサイコロを8回以上投げることはない。以下，サイコロを投げた回数で場合分けする。

[1] 4回で終了するとき

(2)より，

$$4 \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{54}$$

となる。

[2] 5回で終了するとき

出る4種類の目を，2, 5, a, b とする。 a, b は2, 5以外である。 A_2, A_5, A_a で直角三角形ができるとすると，1回目の目は b であり，2回目から4回目は2, 5, a が1回ずつでて5回目に2回目と同じ目が出ればよい。よって a, b の組み合わせは， $4 \cdot 3 = 12$ 通りだから，

$$12 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{108}$$

となる。

[3] 6回で終了するとき

出る5種類の目を，2, 5, a, b, c とする。 a, b, c は2, 5以外である。 A_2, A_5, A_a で直角三角形ができるとすると，1回目の目は b であり，2回目の目は c であり，3回目から5回目は2, 5, a が1回ずつでて6回目に3回目と同じ目が出ればよい。よって， a, b, c の組み合わせは， $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ 通りだから，

$$24 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{324}$$

となる。

[4] 7回で終了するとき

出る6種類の目を，2, 5, a, b, c, d とする。 a, b, c, d は2, 5以外である。 A_2, A_5, A_a で直角三角形ができるとすると，1回目の目は b であり，2回目の目は c であり，3回目の目は d であり，4回目から6回目は2, 5, a が1回ずつでて7回目に4回目と同じ目が出ればよい。よって， a, b, c, d の組み合わせは， $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ 通りだから，

$$24 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{1944}$$

となる。

以上[1], [2], [3], [4]より求める確率は，

$$\frac{1}{54} + \frac{1}{108} + \frac{1}{324} + \frac{1}{1944} = \frac{61}{1944}$$

となる。

(答) $\frac{61}{1944}$