

1.

(1)

$x+2y=A$ とおくと二項定理より,

$$\begin{aligned}(x+2y)^2(x+2y+3z)^4 &= A^2(A+3z)^4 \\ &= A^2\left\{{}_4C_0A^4+{}_4C_1A^3\cdot 3z+{}_4C_2A^2\cdot (3z)^2+{}_4C_3A\cdot (3z)^3+{}_4C_4(3z)^4\right\}\end{aligned}$$

となる。まず, x^4y^2 の係数について考えていく。 z を含まない項は A^6 のみである。よって, A^6 のみを考えればよい。

$$A^6 = {}_6C_0x^6 + {}_6C_1x^5\cdot 2y + {}_6C_2x^4\cdot (2y)^2 + {}_6C_3x^3\cdot (2y)^3 + {}_6C_4x^2\cdot (2y)^4 + {}_6C_5x\cdot (2y)^5 + {}_6C_6(2y)^6$$

であることより, x^4y^2 の係数は ${}_6C_2\cdot 2^2 = 60$ となる。次に, x^3y^2z の係数について考えていく。 z の次数が1である項は ${}_4C_1A^5\cdot 3z$ すなわち $12A^5z$ のみである。よって, $12A^5z$ のみを考えればよい。

$$12A^5z = 12z\left\{{}_5C_0x^5 + {}_5C_1x^4\cdot 2y + {}_5C_2x^3\cdot (2y)^2 + {}_5C_3x^2\cdot (2y)^3 + {}_5C_4x\cdot (2y)^4 + {}_5C_5\cdot (2y)^5\right\}$$

であることより, x^3y^2z の係数は $12\cdot {}_5C_2\cdot 2^2 = 480$ である。

(答) x^4y^2 の係数: 60, x^3y^2z の係数: 480

(2)

$\cos 4\theta = 2\cos^2 2\theta - 1$ であることより,

$$\begin{aligned}\cos 4\theta &= \cos 2\theta \\ \Leftrightarrow 2\cos^2 2\theta - 1 &= \cos 2\theta \\ \Leftrightarrow 2\cos^2 2\theta - \cos 2\theta - 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow (2\cos 2\theta + 1)(\cos 2\theta - 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow \cos 2\theta &= -\frac{1}{2}, 1\end{aligned}$$

となる。ここで, $0 \leq \theta \leq \pi$ より, $2\theta = 0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, 2\pi$ つまり $\theta = 0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi$ となる。

(答) $\theta = 0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi$

2.

(1)

①より整数を n とおくと、

$$\frac{\vec{p} \cdot \vec{q}}{\vec{p} \cdot \vec{p}} = \frac{|\vec{p}||\vec{q}|\cos\theta}{|\vec{p}|^2} = n$$

となる。②より整数を m とおくと、

$$\frac{(2\vec{p}) \cdot (2\vec{q})}{\vec{q} \cdot \vec{q}} = \frac{4|\vec{p}||\vec{q}|\cos\theta}{|\vec{q}|^2} = m$$

となる。これらを辺々かけて、

$$\begin{aligned} 4\cos^2\theta &= mn \\ \Leftrightarrow \cos^2\theta &= \frac{mn}{4} \end{aligned}$$

となる。③より、 $\cos\theta \neq 0$ なので、 $0 < \cos^2\theta \leq 1$ となる。これと n, m は整数であることから、

$$\begin{aligned} \cos^2\theta &= \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1 \\ \Leftrightarrow \cos\theta &= \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}, \pm 1 \\ \therefore \theta &= 0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}, \pi \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \theta = 0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}, \pi$$

(2)

(1)より $\frac{n}{m} = \frac{|\vec{q}|^2}{4|\vec{p}|^2} \Leftrightarrow \frac{|\vec{p}|}{|\vec{q}|} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{m}{n}}$ となる。以下、 θ で場合分けする。

[1] $\theta = 0, \pi$ のとき

$\cos^2\theta = 1$ より、 $nm = 4$ となる。よって、 $(n, m) = (\pm 4, \pm 1), (\pm 2, \pm 2), (\pm 1, \pm 4)$ (複合同順)

となる。よって、 $\frac{m}{n} = \frac{1}{4}, 1, 4$ となるから、

$$\begin{aligned} \frac{|\vec{p}|}{|\vec{q}|} &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{4}}, \frac{1}{2}\sqrt{1}, \frac{1}{2}\sqrt{4} \\ &= \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1 \end{aligned}$$

となる。

[2] $\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$ のとき

$\cos^2\theta = \frac{3}{4}$ より、 $nm = 3$ となる。よって、 $(n, m) = (\pm 3, \pm 1), (\pm 1, \pm 3)$ (複合同順)となる。

よって、 $\frac{m}{n} = \frac{1}{3}, 3$ となるから、

$$\begin{aligned} \frac{|\vec{p}|}{|\vec{q}|} &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{3}}, \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

となる。

[3] $\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$ のとき

$\cos^2\theta = \frac{1}{2}$ より、 $nm = 2$ となる。よって、 $(n, m) = (\pm 2, \pm 1), (\pm 1, \pm 2)$ (複合同順)となる。

よって、 $\frac{m}{n} = \frac{1}{2}, 2$ となるから、

$$\begin{aligned} \frac{|\vec{p}|}{|\vec{q}|} &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}, \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

となる。

[4] $\theta = \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$ のとき

$\cos^2\theta = \frac{1}{4}$ より、 $nm = 1$ となる。よって、 $(n, m) = (\pm 1, \pm 1)$ (複合同順)となる。よって、

$\frac{m}{n} = 1$ となるから、

$$\begin{aligned} \frac{|\vec{p}|}{|\vec{q}|} &= \frac{1}{2}\sqrt{1} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

となる。

以上、[1], [2], [3], [4]より

$$\begin{aligned} \theta = 0, \pi \text{ のとき} \quad \frac{|\vec{p}|}{|\vec{q}|} &= \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1 \\ \theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \text{ のとき} \quad \frac{|\vec{p}|}{|\vec{q}|} &= \frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \theta = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \text{ のとき} \quad \frac{|\vec{p}|}{|\vec{q}|} &= \frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \theta = \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3} \text{ のとき} \quad \frac{|\vec{p}|}{|\vec{q}|} &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \begin{cases} \frac{|\vec{p}|}{|\vec{q}|} = \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1 \quad (\theta = 0, \pi) \\ \frac{|\vec{p}|}{|\vec{q}|} = \frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \left(\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right) \\ \frac{|\vec{p}|}{|\vec{q}|} = \frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \left(\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right) \\ \frac{|\vec{p}|}{|\vec{q}|} = \frac{1}{2} \quad \left(\theta = \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right) \end{cases}$$

(3)

$|\vec{p}| = 1$ であり、 $0 \leq \theta \leq \pi, q_2 \geq 0$ より

$$\begin{cases} q_1 = \frac{|\vec{q}|}{|\vec{p}|}\cos\theta \\ q_2 = \frac{|\vec{q}|}{|\vec{p}|}\sin\theta \end{cases}$$

となる。(2)の場合分けに沿って考えていく。

[1] $\theta = 0, \pi$ のとき

$\frac{|\vec{p}|}{|\vec{q}|} = \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1$ より、 $(q_1, q_2) = (\pm 4, 0), (\pm 2, 0), (\pm 1, 0)$ となる。

[2] $\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$ のとき

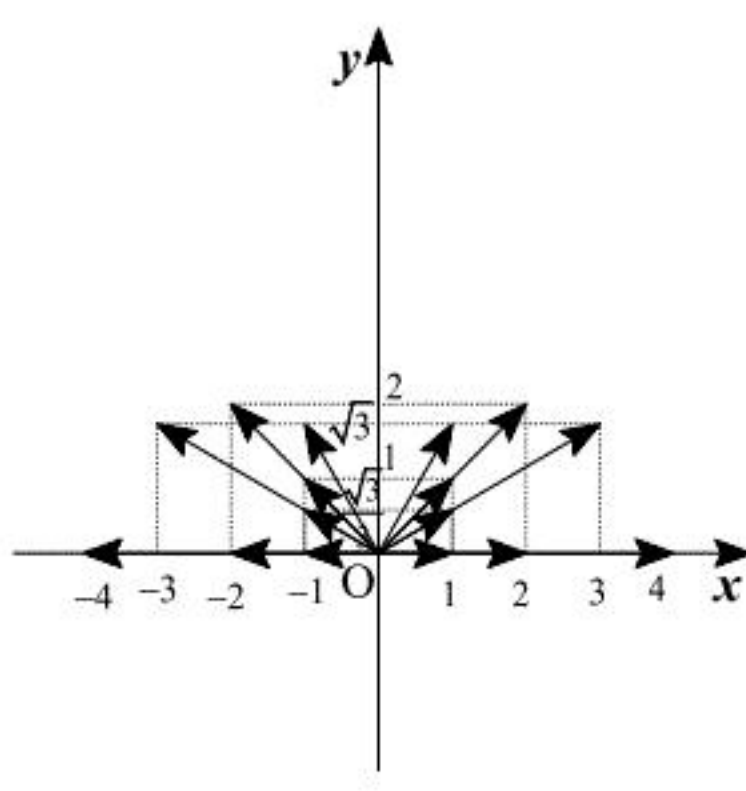
$\frac{|\vec{p}|}{|\vec{q}|} = \frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{\sqrt{3}}{2}$ より、 $(q_1, q_2) = (\pm 3, \sqrt{3}), \left(\pm 1, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ となる。

[3] $\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$ のとき

$\frac{|\vec{p}|}{|\vec{q}|} = \frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}$ より、 $(q_1, q_2) = (\pm 2, 2), (\pm 1, 1)$ となる。

[4] $\theta = \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$ のとき

$\frac{|\vec{p}|}{|\vec{q}|} = \frac{1}{2}$ より、 $(q_1, q_2) = (\pm 1, \sqrt{3})$ となる。



(答) 前図

3.

(1)

置換積分より,

$$\begin{aligned}\int \frac{2}{x} \log x dx &= \int 2 \log x (\log x)' dx \\ &= (\log x)^2 + C\end{aligned}$$

となる。ただし, C は積分定数である。

$$(\text{答}) \quad \int \frac{2}{x} \log x dx = (\log x)^2 + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

(2)

$f(x)=0$ をみたす x は $x=1$ のみであり, $x>1$ では $f(x)>0$, $0<x<1$ では $f(x)<0$ である。
よって, 以下のとおり場合分けをすればよい。

[1] $0<2a\leq 1$ つまり $0<a\leq \frac{1}{2}$ のとき

$a<x<2a$ で $f(x)<0$ より, (1) より

$$\begin{aligned}S(a) &= \int_a^{2a} -f(x) dx \\ &= -\left[(\log x)^2\right]_a^{2a} \\ &= (\log a)^2 - (\log 2a)^2\end{aligned}$$

となる。

[2] $0<a<1, 2a>1$ つまり $\frac{1}{2}<a<1$ のとき

$a<x<1$ で $f(a)<0, 1<x<2a$ で $f(x)>0$ より,

$$\begin{aligned}S(a) &= \int_a^1 -f(x) dx + \int_1^{2a} f(x) dx \\ &= -\left[(\log x)^2\right]_a^1 + \left[(\log x)^2\right]_1^{2a} \\ &= (\log a)^2 + (\log 2a)^2\end{aligned}$$

となる。

[3] $a\geq 1$ のとき

$a<x<2a$ で $f(x)>0$ より,

$$\begin{aligned}S(a) &= \int_a^{2a} f(x) dx \\ &= \left[(\log x)^2\right]_a^{2a} \\ &= (\log 2a)^2 - (\log a)^2\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \begin{cases} S(a) = (\log a)^2 - (\log 2a)^2 & (0 < a \leq \frac{1}{2}) \\ S(a) = (\log a)^2 + (\log 2a)^2 & (\frac{1}{2} < a < 1) \\ S(a) = (\log 2a)^2 - (\log a)^2 & (a \geq 1) \end{cases}$$

(3)

$0<a\leq \frac{1}{2}$ のとき

$$\begin{aligned}S(a) &= (\log a)^2 - (\log 2a)^2 \\ &= (\log a)^2 - (\log 2 + \log a)^2 \\ &= -2 \log 2 \cdot \log a - (\log 2)^2\end{aligned}$$

より $S(a)$ は単調減少である。よって $a=\frac{1}{2}$ のとき $S(a)$ は最小となる。また, $a\geq 1$ のとき

$S(a)=2 \log 2 \cdot \log a + (\log 2)^2$ より $S(a)$ は単調増加である。よって $a=1$ のとき $S(a)$ は最小とな

る。また, $a=\frac{1}{2}, a=1$ で $S(a)$ は連続であり, $S\left(\frac{1}{2}\right)=S(1)=(\log 2)^2$ である。 $\frac{1}{2}<a<1$ のとき,

$$\begin{aligned}S'(a) &= \frac{2}{a} \log a + \frac{2}{a} \log 2a \\ &= \frac{2}{a} (\log 2a^2)\end{aligned}$$

であるので, $S'(a)=0$ となるのは $2a^2=1 \Leftrightarrow a=\frac{1}{\sqrt{2}}$ のときである。よって増減表は下表のようになる。

a	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	1
$S'(a)$		-	0	+	
$S(a)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$	

以上より $a>0$ のとき, $a=\frac{1}{\sqrt{2}}$ で最小値

$$\begin{aligned}S\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) &= \left(\log \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\log 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \\ &= \left(-\frac{1}{2} \log 2\right)^2 + \left(\frac{1}{2} \log 2\right)^2 \\ &= \frac{1}{2} (\log 2)^2\end{aligned}$$

をとる。

$$(\text{答}) \quad a=\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ のとき最小値: } \frac{1}{2} (\log 2)^2$$

4.

(1)

できる図形は三角形より、出る目の数字は3種類である。1, 2, 3回目に出る目を a, b, c とおくと、 A_a, A_b, A_c がそれぞれ線分で結ばれていなければならない。つまり、 a, b, c は異なる数であり、4回目に出る目は、 a であればよい。よって、求める確率は

$$\frac{6}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{54}$$

となる。

(答) $\frac{5}{54}$

(2)

2点を結んだ線分が原点を通る組み合わせは、 (A_2, A_5) のみである。よって、直角三角形を作れる3点の組み合わせは、 A_2 と A_5 とその他のもう1点である。(1)と同様に出る目の数字は3種類であり、1, 2, 3回目に出る目を a, b, c とおくと、 A_a, A_b, A_c がそれぞれ線分で結ばれていなければならない。4回目に出る目は、 a であればよい。以上より、 a, b, c のうち2つは2, 5であり、残りの数は2, 5以外の数であり、残りの数の選び方は4通りであるから、求める確率は、

$$4 \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{54}$$

となる。

(答) $\frac{1}{54}$

(3)

直角三角形ができるのは(2)より4回以上サイコロを投げたときである。また、①よりサイコロを8回以上投げることはない。以下、サイコロを投げた回数で場合分けする。

[1] 4回で終了するとき

(2)より、

$$4 \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{54}$$

となる。

[2] 5回で終了するとき

出る4種類の目を、2, 5, a, b とする。 a, b は2, 5以外である。 A_2, A_5, A_a で直角三角形ができるとすると、1回目の目は b であり、2回目から4回目は2, 5, a が1回ずつでて5回目に2回目と同じ目が出ればよい。よって a, b の組み合わせは、 $4 \cdot 3 = 12$ 通りだから、

$$12 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{108}$$

となる。

[3] 6回で終了するとき

出る5種類の目を、2, 5, a, b, c とする。 a, b, c は2, 5以外である。 A_2, A_5, A_a で直角三角形ができるとすると、1回目の目は b であり、2回目の目は c であり、3回目から5回目は2, 5, a が1回ずつでて6回目に3回目と同じ目が出ればよい。よって、 a, b, c の組み合わせは、 $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ 通りだから、

$$24 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{324}$$

となる。

[4] 7回で終了するとき

出る6種類の目を、2, 5, a, b, c, d とする。 a, b, c, d は2, 5以外である。 A_2, A_5, A_a で直角三角形ができるとすると、1回目の目は b であり、2回目の目は c であり、3回目の目は d であり、4回目から6回目は2, 5, a が1回ずつでて7回目に4回目と同じ目が出ればよい。よって、 a, b, c, d の組み合わせは、 $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ 通りだから、

$$24 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{1944}$$

となる。

以上[1], [2], [3], [4]より求める確率は、

$$\frac{1}{54} + \frac{1}{108} + \frac{1}{324} + \frac{1}{1944} = \frac{61}{1944}$$

となる。

(答) $\frac{61}{1944}$