

1.

(1)

球 A の半径と球 B の半径の比を $r:1$ ($r > 0$) とおくと,

球 A の表面積は球 B の表面積の r^2 倍

球 A の体積は球 B の体積の r^3 倍

となる。よって, $r^3 = n, 2r^2 = n$ となり,

$$r^3 = 2r^2$$

$$\therefore r = 2 \quad (r > 0)$$

を得る。このとき, $n = 2^3 = 8$ である。

(答) $n = 8$

(2)

$y = a - ae^{-bx}$ に $(x, y) = (1, 10), (2, 15)$ を代入して

$$\begin{cases} 10 = a - ae^{-b} \\ 15 = a - ae^{-2b} \end{cases}$$

となる。 $a = 0$ のとき $10 = a - ae^{-b}$ は成立しないため, $a \neq 0$ である。 $e^{-b} = B$ とおいて整理すると,

$$\begin{aligned} & \begin{cases} 10 = a - aB \\ 15 = a - aB^2 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} B = 1 - \frac{10}{a} \\ B^2 = 1 - \frac{15}{a} \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} 3B = 3 - \frac{30}{a} \\ 2B^2 = 2 - \frac{30}{a} \end{cases} \\ & \therefore 2B^2 - 3B + 1 = 0 \end{aligned}$$

となり,

$$\begin{aligned} & 2B^2 - 3B + 1 = 0 \\ & \Leftrightarrow (2B - 1)(B - 1) = 0 \\ & \therefore B = 1, \frac{1}{2} \end{aligned}$$

となる。 $B = 1$ のとき, $a - aB = a - a \cdot 1 = 0$ となり $10 = a - aB$ は成立しない。よって, $B = \frac{1}{2}$ で

ある。 $B = \frac{1}{2}$ のとき, $10 = a - a \cdot \frac{1}{2} = \frac{a}{2}$ より, $a = 20$ となる。このとき,

$a - aB^2 = 20 - 20 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 15$ より, 確かに $15 = a - aB^2$ も成立する。また,

$$\begin{aligned} & B = \frac{1}{2} \\ & \Leftrightarrow e^{-b} = \frac{1}{2} \\ & \Leftrightarrow b = -\log \frac{1}{2} \\ & \Leftrightarrow b = \log 2 \end{aligned}$$

となる。

(答) $a = 20, b = \log 2$

2.

(1)

点 (p, q) は曲線 C 上の点であるから、 $p^2 + a^2 q^2 = 2$ である。よって、 $p^2 = 2 - a^2 q^2 < 2$ となり、さらに、 $p > 0$ であるから、 p^2 のとり得る範囲は $0 < p^2 < 2$ となる。 $p^2 + a^2 q^2 = 2$ より、 $q^2 = \frac{2 - p^2}{a^2}$ ($\because a > 0$) となるから、
$$p^2 q^2 = p^2 \frac{2 - p^2}{a^2} = -\frac{1}{a^2} \{ (p^2 - 1)^2 - 1 \}$$
である。したがって、 $p^2 = 1$ のとき、 $p^2 q^2$ は最大値 $\frac{1}{a^2}$ をとる。 $pq > 0, a > 0$ より、 pq の最大値は $\frac{1}{a}$ となる。

(答) $\frac{1}{a}$

(2)

(1)より、 pq が最大値 $\frac{1}{a}$ をとるとき、

$$p^2 = 1 \\ \therefore p = 1 \quad (\because p > 0)$$

である。また、 $pq = \frac{1}{a}$ より $q = \frac{1}{a}$ となる。

(答) $p = 1, q = \frac{1}{a}$

(3)

楕円の接線の公式より、求める接線の方程式は、

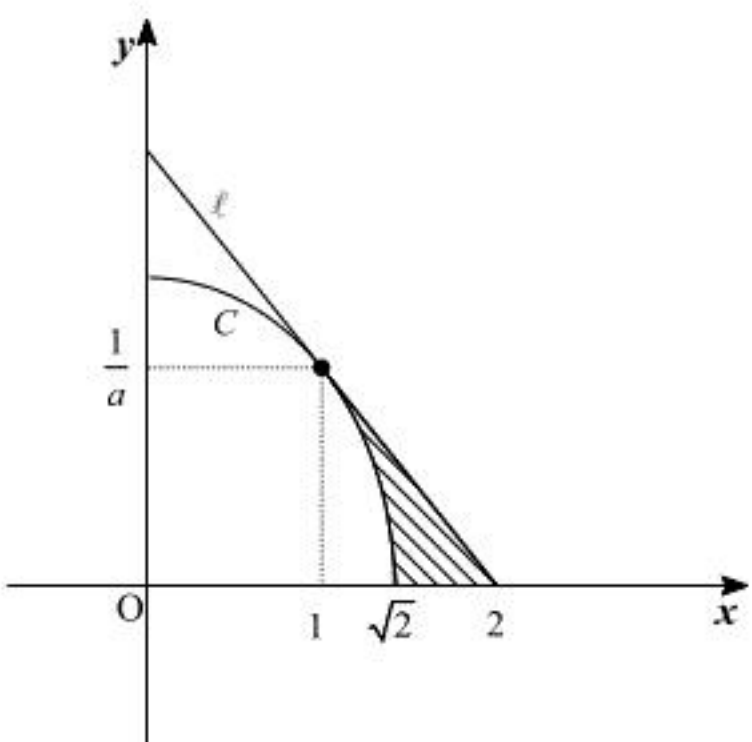
$$\frac{1 \cdot x}{2} + \frac{a^2 \cdot \frac{1}{a} \cdot y}{2} = 1 \\ \Leftrightarrow x + ay = 2$$

となる。

(答) $x + ay = 2$

(4)

曲線 C および接線 ℓ を図示すると下図の通りである。また、斜線部が領域 D である。



よって、

$$S = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{a} \cdot (2 - 1) - \int_1^{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{2 - x^2}}{a} dx \\ = \frac{1}{2a} - \frac{1}{a} \int_1^{\sqrt{2}} \sqrt{2 - x^2} dx$$

である。ここで $x = \sqrt{2} \sin \theta$ とおくと、 $\frac{dx}{d\theta} = \sqrt{2} \cos \theta$ である。また、対応は以下の通りである。

x	1	$\rightarrow$	$\sqrt{2}$
θ	$\frac{\pi}{4}$	$\rightarrow$	$\frac{\pi}{2}$

よって、置換積分を用いて、

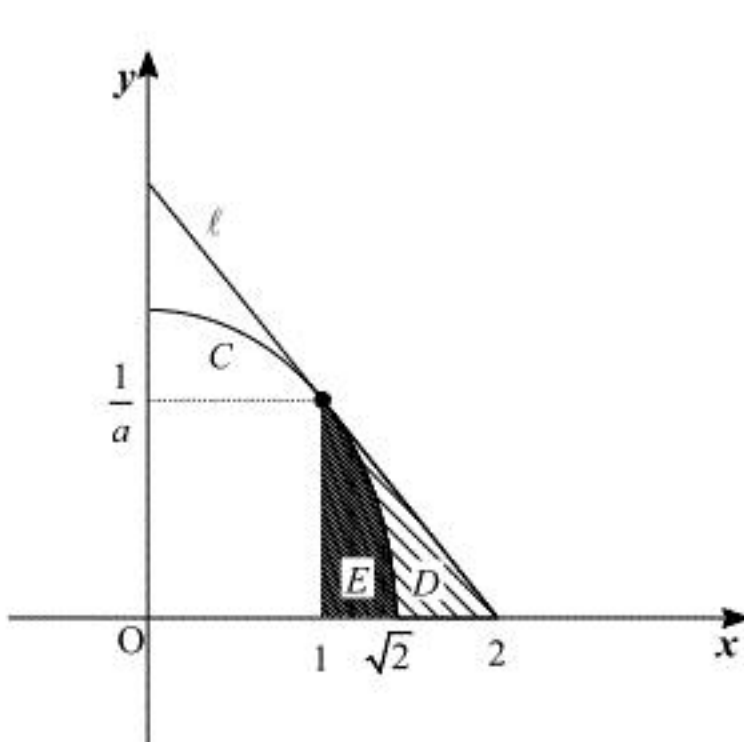
$$S = \frac{1}{2a} - \frac{1}{a} \int_1^{\sqrt{2}} \sqrt{2 - x^2} dx \\ = \frac{1}{2a} - \frac{1}{a} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2 - (\sqrt{2} \sin \theta)^2} (\sqrt{2} \cos \theta) d\theta \\ = \frac{1}{2a} - \frac{2}{a} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta d\theta \\ = \frac{1}{2a} - \frac{2}{a} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2\theta + 1}{2} d\theta \\ = \frac{1}{2a} - \frac{2}{a} \left[\frac{\sin 2\theta}{4} + \frac{\theta}{2} \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \\ = \frac{1}{2a} - \frac{2}{a} \left(\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} \right) \\ = \frac{4 - \pi}{4a}$$

である。

(答) $S = \frac{4 - \pi}{4a}$

(5)

下図の打点部を領域 E とする。



領域 D および E を x 軸のまわりに1回転してできる回転体は、底面が半径 $\frac{1}{a}$ 、高さが1の円錐である。また、領域 E を x 軸のまわりに1回転してできる回転体の体積を求める式は、

$$\pi \int_1^{\sqrt{2}} \left(\frac{\sqrt{2 - x^2}}{a} \right)^2 dx$$

となる。したがって、体積 V は

$$V = \frac{1}{3} \pi \left(\frac{1}{a} \right)^2 \cdot 1 - \pi \int_1^{\sqrt{2}} \left(\frac{\sqrt{2 - x^2}}{a} \right)^2 dx \\ = \frac{\pi}{3a^2} - \frac{\pi}{a^2} \int_1^{\sqrt{2}} (2 - x^2) dx \\ = \frac{\pi}{3a^2} - \frac{\pi}{a^2} \left[2x - \frac{x^3}{3} \right]_1^{\sqrt{2}} \\ = \frac{\pi}{3a^2} - \frac{\pi}{a^2} \left(\frac{4}{3} \sqrt{2} - \frac{5}{3} \right) \\ = \frac{2\pi}{3a^2} (3 - 2\sqrt{2})$$

である。

(答) $V = \frac{2\pi}{3a^2} (3 - 2\sqrt{2})$

3.
(1)

$$\begin{aligned}\left(xe^{\frac{1}{x}}\right)' &= x' \cdot e^{\frac{1}{x}} + x \cdot \left(e^{\frac{1}{x}}\right)' \\ &= e^{\frac{1}{x}} + x \left(-\frac{1}{x^2}\right) e^{\frac{1}{x}} \\ &= \left(1 - \frac{1}{x}\right) e^{\frac{1}{x}}\end{aligned}$$

であるから、 $\left(t, te^{\frac{1}{t}}\right) (t \neq 0)$ における曲線 C の接線の方程式は

$$\begin{aligned}y - te^{\frac{1}{t}} &= \left(1 - \frac{1}{t}\right) e^{\frac{1}{t}} (x - t) \\ \Leftrightarrow y &= \left(1 - \frac{1}{t}\right) e^{\frac{1}{t}} x + e^{\frac{1}{t}}\end{aligned}$$

となる。よって、 $a = \left(1 - \frac{1}{t}\right) e^{\frac{1}{t}}, b = e^{\frac{1}{t}}$ である。

$$\text{(答)} \quad a = \left(1 - \frac{1}{t}\right) e^{\frac{1}{t}}, b = e^{\frac{1}{t}}$$

(2)

(1)より、

$$\begin{aligned}\alpha = \lim_{t \rightarrow +\infty} a &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{t}\right) e^{\frac{1}{t}} = 1 \\ \beta = \lim_{t \rightarrow +\infty} b &= \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{t}} = 1\end{aligned}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad \alpha = 1, \beta = 1$$

(3)

$$\begin{aligned}\left(xe^{\frac{1}{x}}\right)'' &= \left\{\left(1 - \frac{1}{x}\right) e^{\frac{1}{x}}\right\}' \\ &= \left(1 - \frac{1}{x}\right)' e^{\frac{1}{x}} + \left(1 - \frac{1}{x}\right) \left(e^{\frac{1}{x}}\right)' \\ &= \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} - \left(1 - \frac{1}{x}\right) \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} \\ &= \frac{1}{x^3} e^{\frac{1}{x}}\end{aligned}$$

であるから、 $y = xe^{\frac{1}{x}}$ の増減表は以下の通りとなる。

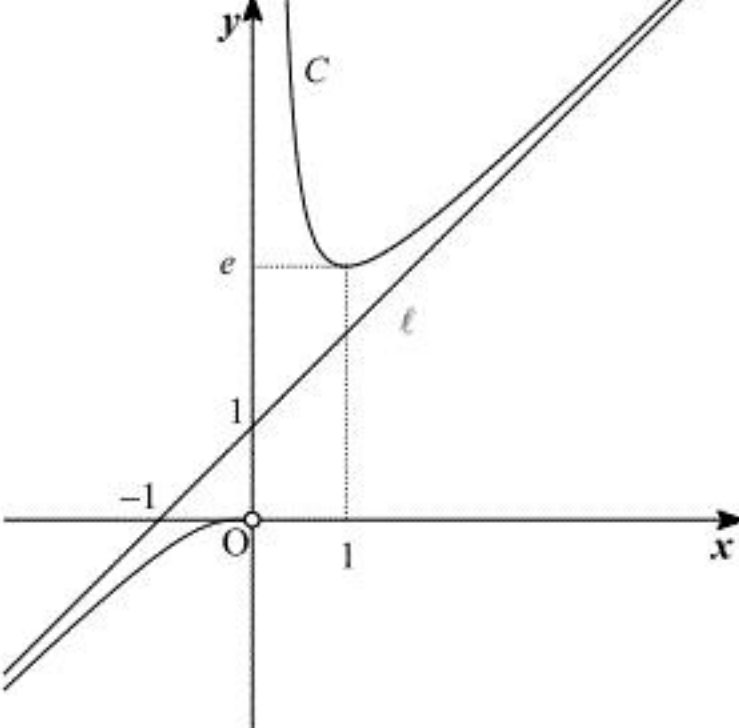
x	...	0	...	1	...
y''	-	$\times$	+	+	+
y'	+	$\times$	-	0	+
y	$\nearrow$	$\times$	$\searrow$	e	$\nearrow$

また、 $\lim_{x \rightarrow +0} xe^{\frac{1}{x}} = \infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{\frac{1}{x}} = \infty, \lim_{x \rightarrow -0} xe^{\frac{1}{x}} = 0, \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^{\frac{1}{x}} = -\infty$ である。さらに、

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow -\infty} a &= \lim_{t \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{1}{t}\right) e^{\frac{1}{t}} = 1 \\ \lim_{t \rightarrow -\infty} b &= \lim_{t \rightarrow -\infty} e^{\frac{1}{t}} = 1\end{aligned}$$

であるから、曲線 C 上の点 $\left(t, te^{\frac{1}{t}}\right)$ における接線の方程式は、 $t \rightarrow \pm\infty$ のとき、 $y = x + 1$ となる。

以上より、曲線 C および直線 ℓ は下図の通りとなる。



(答) 前図

(4)

$y \geq xe^{\frac{1}{x}}, x > 0$ を満たす (x, y) について、 $p = \frac{y - q}{x}$ のとり得る範囲を考える。 p は y について

の増加関数であるから、ある $x (x > 0)$ について、 p のとり得る範囲は

$$\begin{aligned}p &\geq \frac{xe^{\frac{1}{x}} - q}{x} \\ &= e^{\frac{1}{x}} - \frac{q}{x}\end{aligned}$$

となる。 $f(x) = e^{\frac{1}{x}} - \frac{q}{x}$ とおくと、

$$\begin{aligned}f'(x) &= \left(\frac{1}{x}\right)' e^{\frac{1}{x}} + \frac{q}{x^2} \\ &= \frac{q - e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\end{aligned}$$

である。

[1] $q \leq 1$ のとき

$f(x)$ の $x > 0$ における増減表は下の通りである。

x	0	...
$f'(x)$	$\times$	-
$f(x)$	$\times$	$\searrow$

また、 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(e^{\frac{1}{x}} - \frac{q}{x}\right) = 1$ であるから、 $x > 0$ における $f(x)$ のとり得る範囲は

$f(x) > 1$ である。それぞれの $x (x > 0)$ について、 p のとり得る範囲は $p \geq f(x)$ であるから、

以上より、 $x > 0$ において p のとり得る範囲は $p > 1$ である。

[2] $q > 1$ のとき

$$\begin{aligned}f'(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{q - e^{\frac{1}{x}}}{x^2} &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{1}{\log q}\end{aligned}$$

であるから、 $f(x)$ の $x > 0$ における増減表は下の通りである。

x	0	...	$\frac{1}{\log q}$	...
$f'(x)$	$\times$	+	0	-
$f(x)$	$\times$	$\searrow$	$q(1 - \log q)$	$\nearrow$

それぞれの $x (x > 0)$ について、 p のとり得る範囲は $p \geq f(x)$ であるから、以上より、

$x > 0$ において p のとりうる範囲は、 $p \geq q(1 - \log q)$ である。

以上[1], [2]より、 p のとりうる範囲は、

$$\begin{aligned}q \leq 1 \text{ のとき, } & p > 1 \\ q > 1 \text{ のとき, } & p \geq q(1 - \log q)\end{aligned}$$

である。

(答) 前述