

平成 31 年度・入学試験問題

数 学 (医)

注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
2. 試験開始後、すべての解答用紙に氏名(カタカナ)及び受験番号を記入しなさい。
受験番号が正しく記入されていない場合は、採点できないことがあります。また、氏名(カタカナ)及び受験番号以外の文字、数字などは、絶対に記入してはいけません。
3. 答案は解答用紙の各問題番号の欄に記入しなさい。
4. 解答用紙の裏面には何も書いてはいけません。
5. 試験終了後、問題冊子および下書用紙は持ち帰りなさい。

すべての問題について、求める手順をわかりやすく説明すること。

1. 関数 $f(x) = \frac{2}{x} \log x$ ($x > 0$) について、次の問いに答えよ。ただし、 $\log x$ は自然対数を表す。

(1) a を正の実数とする。曲線 $y = f(x)$ と x 軸および直線 $x = a$, $x = 2a$ で囲まれた部分の面積 $S(a)$ を求めよ。

(2) $S(a)$ が最小となるときの a の値と、そのときの $S(a)$ の値を求めよ。

2. 以下の条件を同時に満たすベクトル $\vec{p}, \vec{q}$ について考える。

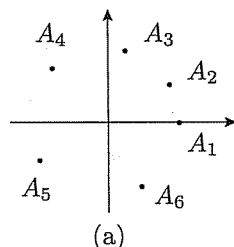
$$\textcircled{1} \quad \frac{\vec{p} \cdot \vec{q}}{\vec{p} \cdot \vec{p}} \text{は整数} \quad \textcircled{2} \quad \frac{(2\vec{p}) \cdot (2\vec{q})}{\vec{q} \cdot \vec{q}} \text{は整数} \quad \textcircled{3} \quad \vec{p} \cdot \vec{q} \neq 0 \quad \textcircled{4} \quad |\vec{p}| \neq 0, |\vec{q}| \neq 0$$

ただし、 $\vec{p} \cdot \vec{q}$ は 2 つのベクトル $\vec{p}, \vec{q}$ の内積を表す。次の問いに答えよ。

- (1) $\vec{p}, \vec{q}$ のなす角を θ ($0 \leq \theta \leq \pi$) とする。 θ の値をすべて求めよ。
- (2) (1) の各 θ に対して、2 つのベクトル $\vec{p}, \vec{q}$ の大きさの比をすべて求めよ。
- (3) xy 平面上に、原点を始点とするベクトル $\vec{p} = (1, 0)$ および $\vec{q} = (q_1, q_2)$ ($q_2 \geq 0$) を考える。 $\vec{p}, \vec{q}$ が上記の条件 $\textcircled{1}$ から $\textcircled{4}$ を同時に満たすとき、ベクトル $\vec{q}$ を xy 平面上にすべて図示せよ。

3. サイコロを使って以下の①から③の操作を行うことで、図 (a) にある xy 平面上の点 $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ のいくつかを線分で結んだ折れ線または 1 点からなる図形を作る。

- ① サイコロを投げて出た数字を投げた順番に並べる。ただし、一度出た数字がもう一度出たら、そこでサイコロを投げるのをやめるものとする。できた数字の列を $[i_1, i_2, \dots, i_n]$ とする。
- ② $n = 2$ のとき、1 点 A_{i_1} からなる図形となる。 $n \geq 3$ のとき、 $A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_{n-1}}$ を線分で順次結ぶ。
- ③ 最後の数字 i_n が i_{n-1} または i_{n-2} と一致するとき、新たな点や線分を加えることなく作図を終了する。それ以外のときは、 $A_{i_{n-1}}$ と A_{i_n} を線分で結び作図を終了する。



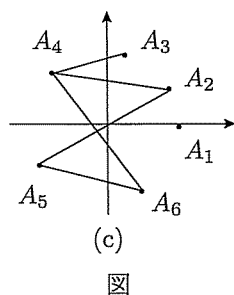
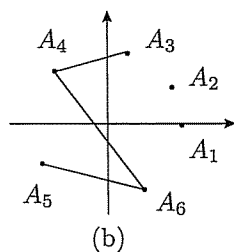
例えば、 $[3, 4, 6, 5, 5]$ や $[3, 4, 6, 5, 6]$ の順で数字が出たときの図形は図 (b) となる。また $[3, 4, 6, 5, 2, 4]$ の順で数字が出たときの図形は図 (c) となる。なお、点 $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ の座標は

$$A_1 = (1, 0), \quad A_2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right), \quad A_3 = \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} \right),$$

$$A_4 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \quad A_5 = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} \right), \quad A_6 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

である。次の問いに答えよ。

- (1) 作図終了後、図形が点 $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ のうち 3 点を頂点とする三角形となる確率を求めよ。
- (2) 作図終了後、図形が点 $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ のうち 3 点を頂点とする直角三角形となる確率を求めよ。
- (3) 作図終了後、図形の中に $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ のいずれかを 3 頂点とする直角三角形が含まれる確率を求めよ。



図

4. 数列 $\{a_n\}$ を次のように定める。

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \begin{cases} a_n - 1 & a_n > 0 \text{ のとき} \\ n & a_n \leq 0 \text{ のとき} \end{cases} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

次の問いに答えよ。

- (1) $a_n = 10000$ となる最小の n の値を求めよ。
- (2) $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n で表す。 $S_n \geq 10000$ となる最小の n の値を求めよ。

