

平成 31 年度・入学試験問題

数 学 (中)

注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
2. 試験開始後、すべての解答用紙に氏名(カタカナ)及び受験番号を記入しなさい。
受験番号が正しく記入されていない場合は、採点できないことがあります。また、氏名(カタカナ)及び受験番号以外の文字、数字などは、絶対に記入してはいけません。
3. 答案は解答用紙の各問題番号の欄に記入しなさい。
4. 解答用紙の縦の線の右側には、受験番号以外は何も記入してはいけません。
5. 解答用紙の裏面には何も書いてはいけません。
6. 試験終了後、問題冊子および下書用紙は持ち帰りなさい。

すべての問題について、求める手順をわかりやすく説明すること。

1. 以下の問いに答えよ。

- (1) 球 A と球 B がある。球 A の体積の n 倍が、球 B の体積と等しく、球 A の表面積の n 倍が、球 B の表面積の 2 倍に等しい。このときの n を求めよ。
- (2) xy 平面上の曲線 $y = a - ae^{-bx}$ が、点 $(1, 10)$ と点 $(2, 15)$ の 2 点を通るとき、定数 a, b を求めよ。

2. a を正の定数とし、 xy 平面上の楕円 $x^2 + a^2y^2 = 2$ の $x \geq 0, y \geq 0$ の部分を曲線 C とする。点 $P(p, q)$ が、曲線 C 上を動くとき、以下の問いに答えよ。ただし、 $p > 0, q > 0$ とする。

- (1) pq の最大値を a を用いて表せ。
- (2) pq が最大となるときの p, q を a を用いて表せ。
- (3) pq が最大となるときの点 P における曲線 C の接線 ℓ の方程式を a を用いて表せ。
- (4) (3) で求めた接線 ℓ と x 軸、および曲線 C で囲まれた領域を D とする。 D の面積 S を a を用いて表せ。
- (5) (4) で定めた領域 D を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V を a を用いて表せ。

3. xy 平面上の曲線 $C: y = xe^{\frac{1}{x}}$ について以下の問いに答えよ。ただし、 $\lim_{x \rightarrow +0} xe^{\frac{1}{x}} = \infty$ を用いてよい。
- (1) $x = t$ ($t \neq 0$) における曲線 C の接線を $y = ax + b$ とする。 a, b を t を用いて表せ。
 - (2) $t \rightarrow \infty$ のときの a, b の極限值をそれぞれ α, β とする。 α, β の値を求めよ。
 - (3) (2) で求めた α, β を用いて直線 $\ell: y = \alpha x + \beta$ を定義する。曲線 C および直線 ℓ の概形を同一の xy 平面上に描け。
 - (4) $y \geq xe^{\frac{1}{x}}$ かつ $x > 0$ を満たす領域を D とする。領域 D 内を動く点 (x, y) に対し $p = \frac{y - q}{x}$ とするとき、 p のとり得る値の範囲を求めよ。ただし、 q は定数である。

