

数 学

(情—自然情報・理・医・工・農)

2月25日(日) 9:00—11:00

注 意 事 項

1. 試験開始の合図まで、この冊子を開いてはいけない。
2. 冊子の枚数は表紙を含めて12枚(そのうち答案紙5枚、数学公式集3枚、草稿用紙3枚)である。
問題は各答案紙に1題ずつ印刷されている。
3. 落丁、乱丁、印刷不鮮明な箇所などがあつたら、ただちに申し出よ。
4. 解答にかかる前にこの冊子左端の折り目をていねいに切り離し、すべての答案紙の所定の2箇所に受験番号を記入せよ。
5. 解答は必ず各問題別の答案紙表の所定の欄に記入せよ。
6. 草稿用紙のほか、この冊子の答案紙以外の余白は、草稿用に使用してよい。
7. 数学公式集は問題と無関係に、文科系、理科系の区別なく作成されたものであるが、答案作成にあたって利用してよい。
8. 試験終了時刻までは退室してはいけない。
9. 答案紙は持ち帰ってはいけない。その他は持ち帰ってもよい。
10. 問題④は選択問題であり、(a)、(b)の2題からなるが、いずれかの1題だけを解答するものとする。④の答案として1題だけを提出する。他方の答案紙は、大きく斜線を引いたうえで、最後に提出する。

1

理科系

受 験 番 号

32 数 学

答 案 紙

受験番号

1 数列 $\{a_n\}$ があって、すべての n について、初項 a_1 から第 n 項 a_n までの和が $\left(a_n + \frac{1}{4}\right)^2$ に等しいとする。

- 1) a_n がすべて正とする。一般項 a_n を求めよ。
- 2) 最初の 100 項のうち、1 つは負で他はすべて正とする。 a_{100} を求めよ。

1

(解答欄)

答 案 紙

受験番号

2

xyz 空間内で、平面 $z = 1$ 上に円 $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 4$ 、平面 $z = 2$ 上に直線 $x = 1$ がある。点 $A(0, 0, t)$ 、 $t > 2$ 、にある光源が xy 平面に映すこれらの円と直線の影を、それぞれ C 、 ℓ とする。

- 1) C と ℓ が相異なる 2 点で交わるような t の範囲を求めよ。
- 2) C と ℓ の 2 交点を結ぶ線分の中点を P とする。 t が 1) の範囲を動くときの点 P の軌跡を図示せよ。

2

(解答欄)

答 案 紙

受験番号

3 自然数 n と正の数 t に対して

$$f_n(t) = \int_1^n \frac{1}{x} \left| \log \frac{t}{x} \right| dx$$

とおく。

1) 各 n に対して、 $1 \leq t \leq n$ における $f_n(t)$ の最大値 A_n と最小値 B_n を求めよ。

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} (A_{n+1} - A_n)$ を求めよ。ただし、 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x} = 0$ は用いてよい。

3 (解答欄)

4

(a)

理科系

受験番号

32 数学

答 案 紙

受験番号

第4問は選択問題である。つぎの④(a)または別紙の④(b)のいずれか一方を選んで解答せよ。

4

(a) 3人がじゃんけんで、1, 2, 3番を決める。ちょうど n 回目で3人の順位が確定する確率 $P(n)$ を求めよ。ただし3人とも、グー、チョキ、パーを出す確率はすべて $\frac{1}{3}$ とする。

4

(a) (解答欄)

答 案 紙

受験番号



第4問は選択問題である。つぎの④(b)または別紙の④(a)のいずれか一方を選んで解答せよ。

④ (b) $f_0(x) = 1, f_1(x) = 1 - x, \dots, f_n(x) = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{(-1)^n x^n}{n!}, \dots$

とおく。このとき、次を示せ。

- 1) $n \geq 1$ のとき、 $f'_n(x) = -f_{n-1}(x)$ である。
- 2) $x \geq 0$ とするとき、 n が偶数なら $f_n(x) \geq e^{-x}$ 、奇数なら $f_n(x) \leq e^{-x}$ が成立する。
- 3) n が奇数のとき、 $f_n(x) = 0$ は $x \geq 0$ の範囲でただ1つの解をもつ。

数 学 公 式 集

この公式集は問題と無関係に作成されたものであるが、答案作成にあたって利用してよい。この公式集は持ち帰ってよい。

(不 等 式)

$$1. \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}, \quad \frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}, \quad (a, b, c \text{ は正または } 0)$$

$$2. (a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) \geq (ax + by + cz)^2$$

(三 角 形)

$$3. \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

$$4. a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$5. S = \frac{1}{2} bc \sin A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \quad (s = \frac{1}{2}(a+b+c))$$

(図 形 と 式)

6. 数直線上の2点 x_1, x_2 を $m:n$ に内分および外分する点：

$$\frac{mx_2 + nx_1}{m+n}, \quad \frac{mx_2 - nx_1}{m-n}$$

7. 点 (x_1, y_1) と直線 $ax + by + c = 0$ との距離、および点 (x_1, y_1, z_1) と平面 $ax + by + cz + d = 0$ との距離：

$$\frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

8. だ円 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 上の点 (x_1, y_1) における接線： $\frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = 1$

9. 双曲線 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 上の点 (x_1, y_1) における接線： $\frac{x_1 x}{a^2} - \frac{y_1 y}{b^2} = 1$

(ベクトルと行列)

$$10. 2つのベクトルのなす角：\cos \theta = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

$$11. \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}, \quad (ad-bc \neq 0)$$

12. 点 (x, y) を原点のまわりに角 θ 回転した点を (x', y') とすれば

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

(対 数)

$$13. \log_a M = \frac{\log_b M}{\log_b a}$$

(三角関数)

$$14. \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$15. \tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

$$16. \cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$$

$$17. \sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \{ \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) \}$$

$$\cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} \{ \sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) \}$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \{ \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) \}$$

$$\sin \alpha \sin \beta = -\frac{1}{2} \{ \cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) \}$$

$$18. \sin A + \sin B = 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$$

$$\sin A - \sin B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$$

$$\cos A + \cos B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$$

$$\cos A - \cos B = -2 \sin \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$$

$$19. a \sin \theta + b \cos \theta = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\theta + \alpha), \quad (\sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}})$$

(数列)

$$20. \text{初項 } a, \text{ 公差 } d, \text{ 項数 } n \text{ の等差数列の和: } S_n = \frac{1}{2} n(a + l) = \frac{1}{2} n \{ 2a + (n-1)d \}, \quad (l = a + (n-1)d)$$

$$21. \text{初項 } a, \text{ 公比 } r, \text{ 項数 } n \text{ の等比数列の和: } S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}, \quad (r \neq 1)$$

$$22. 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left\{ \frac{1}{2} n(n+1) \right\}^2$$

(極限)

$$23. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e = 2.71828 \cdots$$

$$24. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

(微 積 分)

$$25. \{f(g(x))\}' = f'(g(x))g'(x)$$

$$26. x = f(y) \text{ のとき } \frac{dy}{dx} = \left(\frac{dx}{dy}\right)^{-1}$$

$$27. x = x(t), y = y(t) \text{ のとき } \frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)}$$

$$28. (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, (\log x)' = \frac{1}{x}$$

$$29. \int f(g(t))g'(t)dt = \int f(x)dx$$

$$30. \int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$$

$$31. \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \log |f(x)| + C$$

$$32. \int \log x dx = x \log x - x + C$$

$$33. \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{4} \pi a^2 (a > 0), \int_0^a \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{\pi}{4a}$$

$$34. \text{回転体の体積: } V = \pi \int_a^b \{f(x)\}^2 dx$$

$$35. \text{曲線の長さ: } \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt, (x = x(t), y = y(t), a = x(\alpha), b = x(\beta))$$

(順列・組合せ)

$$36. {}_n C_r = {}_{n-1} C_r + {}_{n-1} C_{r-1}, (1 \leq r \leq n-1)$$

$$37. (a+b)^n = \sum_{r=0}^n {}_n C_r a^{n-r} b^r$$

(確 率)

$$38. \text{確率 } p \text{ の事象が } n \text{ 回の試行中 } r \text{ 回起る確率: } P_r = {}_n C_r p^r q^{n-r}, (q = 1-p)$$

$$39. \text{確率変数 } X \text{ の平均値: } E(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_i$$

$$\text{分散: } V(X) = \sum_{i=1}^n (x_i - m)^2 p_i = \sum_{i=1}^n x_i^2 p_i - m^2, (m = E(X))$$

$$\text{標準偏差: } \sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

$$40. 2 \text{ 項分布 } B(n, p) \text{ については, } E(X) = np, \sigma(X) = \sqrt{npq}$$