

数 学

(情—自然情報・理・医・工・農)

2月25日(火) 9:00—11:00

注 意 事 項

1. 試験開始の合図まで、この冊子を開いてはいけない。
2. 冊子の枚数は表紙を含めて12枚(そのうち答案紙5枚、数学公式集3枚、草稿用紙3枚)である。
問題は各答案紙に1題ずつ印刷されている。
3. 落丁、乱丁、印刷不鮮明な箇所などがあつたら、ただちに申し出よ。
4. 解答にかかる前にこの冊子左端の折り目をていねいに切り離し、すべての答案紙の所定の2箇所に受験番号を記入せよ。
5. 解答は必ず各問題別の答案紙表の所定の欄に記入せよ。
6. 草稿用紙のほか、この冊子の答案紙以外の余白は、草稿用に使用してよい。
7. 数学公式集は問題と無関係に、文科系、理科系の区別なく作成されたものであるが、答案作成にあたって利用してよい。
8. 試験終了時刻までは退室してはいけない。
9. 答案紙は持ち帰ってはいけない。その他は持ち帰ってよい。
10. 問題④は選択問題であり、(a)、(b)の2題からなるが、いずれかの1題だけを解答するものとする。④の答案として1題だけを提出する。他方の答案紙は、大きく斜線を引いたうえで、最後に提出する。

答 案 紙

受験番号

- 1 $\triangle ABC$ 上に時速 u , v , w で等速運動する 3 点があって、それぞれ A から辺 AB に沿って B へ、 B から辺 BC に沿って C へ、 C から辺 CA に沿って A へ同時に出発したとする。 t 時間後のそれらの位置をそれぞれ $P(t)$, $Q(t)$, $R(t)$ とする。
3 点が同時に次の頂点に到達するための必要十分条件は、 $\triangle P(t)Q(t)R(t)$ の重心の位置が t によらず一定なことである。
これを示せ。

- 1 (解答欄)

2

理科系

受 験 番 号

32 数 学

答 案 紙

受験番号

2

座標平面上で、一つの円が放物線 $y = x^2$ に右側から接し、かつ x 軸に上から接している。放物線との接点 A の x 座標を $a(>0)$ とするとき、円の中心 C の座標を求めよ。

ただし、円と放物線がある点で接するとは、その点で両者が交わり、かつその点における両者の接線が一致することをいう。

2

(解答欄)

3

理科系

受 験 番 号

32 数 学

答 案 紙

受験番号

3

正数からなる数列 $\{a_n\}$ が、条件

$$\sum_{k=1}^n (a_k)^2 = n^2 + 2n$$

をみたしているとする。数列 $\left\{\frac{a_1 + \dots + a_n}{n^r}\right\}$ が収束する実数 r の範囲を求めよ。また収束する場合、その極限値を求めよ。

3

(解答欄)

4

(a)

理科系

受験番号

32 数学

答 案 紙

受験番号

第4問は選択問題である。つぎの④(a)または別紙の④(b)のいずれか一方を選んで解答せよ。

4

- (a) 均質な材質で出来た直方体の各面に1から6までの数をつづつ書いてサイコロの代わりにする(1の反対側が6とはかぎらない)。ある数の出る確率が $\frac{1}{9}$ であり、別のある数が出る確率が $\frac{1}{4}$ であるとする。さらに出る目の数の期待値が3であるとする。3の書かれている面の反対側の面に書かれている数は何か。

4

- (a) (解答欄)

4

(b)

理科系

受 験 番 号

32 数 学

答 案 紙

受験番号

第4問は選択問題である。つぎの④(b)または別紙の④(a)のいずれか一方を選んで解答せよ。

4

(b) 1) 多項式 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ (a, b, c は実数) を考える。 $f(-1), f(0), f(1)$ がすべて整数ならば、

すべての整数 n に対し、 $f(n)$ は整数であることを示せ。

2) $f(1996), f(1997), f(1998)$ がすべて整数の場合はどうか？

4

(b) (解答欄)

数 学 公 式 集

この公式集は問題と無関係に作成されたものであるが、答案作成にあたって利用してよい。この公式集は持ち帰ってよい。

(不 等 式)

$$1. \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}, \frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}, (a, b, c \text{ は正または } 0)$$

$$2. (a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) \geq (ax + by + cz)^2$$

(三 角 形)

$$3. \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

$$4. a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$5. S = \frac{1}{2} bc \sin A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, (s = \frac{1}{2}(a+b+c))$$

(図 形 と 式)

6. 数直線上の2点 x_1, x_2 を $m:n$ に内分および外分する点:

$$\frac{mx_2 + nx_1}{m+n}, \frac{mx_2 - nx_1}{m-n}$$

7. 点 (x_1, y_1) と直線 $ax + by + c = 0$ との距離, および点 (x_1, y_1, z_1) と平面 $ax + by + cz + d = 0$ との距離:

$$\frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$8. \text{ だ円 } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ 上の点 } (x_1, y_1) \text{ における接線: } \frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = 1$$

$$9. \text{ 双曲線 } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ 上の点 } (x_1, y_1) \text{ における接線: } \frac{x_1 x}{a^2} - \frac{y_1 y}{b^2} = 1$$

(ベクトルと行列)

$$10. \text{ 2つのベクトルのなす角: } \cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$$

$$11. \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}, (ad-bc \neq 0)$$

12. 点 (x, y) を原点のまわりに角 θ 回転した点を (x', y') とすれば

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

(複 素 数)

13. 極形式表示: $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$, ($r = |z|$, $\theta = \arg z$)

14. $z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$, $z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$ に対し,

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 \{\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)\}$$

15. ド・モアブルの公式: $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ に対し,

$$z^n = r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta)$$

(対 数)

16. $\log_a M = \frac{\log_b M}{\log_b a}$

(三 角 関 数)

17. $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

18. $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$

19. $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$

20. $\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)\}$

$$\cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} \{\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)\}$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \{\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)\}$$

$$\sin \alpha \sin \beta = -\frac{1}{2} \{\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)\}$$

21. $\sin A + \sin B = 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$

$$\sin A - \sin B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$$

$$\cos A + \cos B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$$

$$\cos A - \cos B = -2 \sin \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$$

22. $a \sin \theta + b \cos \theta = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\theta + \alpha)$, ($\sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, $\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$)

(数 列)

23. 初項 a , 公差 d , 項数 n の等差数列の和: $S_n = \frac{1}{2} n(a + l) = \frac{1}{2} n \{2a + (n-1)d\}$, ($l = a + (n-1)d$)

24. 初項 a , 公比 r , 項数 n の等比数列の和: $S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}$, ($r \neq 1$)

25. $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left\{ \frac{1}{2} n(n+1) \right\}^2$$

(極 限)

$$26. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e = 2.71828 \cdots$$

$$27. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

(微 積 分)

$$28. \{f(g(x))\}' = f'(g(x))g'(x)$$

$$29. x = f(y) \text{ のとき } \frac{dy}{dx} = \left(\frac{dx}{dy}\right)^{-1}$$

$$30. x = x(t), y = y(t) \text{ のとき } \frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)}$$

$$31. (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, (\log x)' = \frac{1}{x}$$

$$32. \int f(g(t))g'(t)dt = \int f(x)dx$$

$$33. \int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$$

$$34. \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \log |f(x)| + C$$

$$35. \int \log x dx = x \log x - x + C$$

$$36. \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{4} \pi a^2 (a > 0), \int_0^a \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{\pi}{4a}$$

$$37. \text{回転体の体積: } V = \pi \int_a^b \{f(x)\}^2 dx$$

$$38. \text{曲線の長さ: } \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt, (x = x(t), y = y(t), a = x(\alpha), b = x(\beta))$$

(順列・組合せ)

$$39. {}_n C_r = {}_{n-1} C_r + {}_{n-1} C_{r-1}, (1 \leq r \leq n-1)$$

$$40. (a+b)^n = \sum_{r=0}^n {}_n C_r a^{n-r} b^r$$

(確 率)

$$41. \text{確率 } p \text{ の事象が } n \text{ 回の試行中 } r \text{ 回起る確率: } P_r = {}_n C_r p^r q^{n-r}, (q = 1-p)$$

$$42. \text{期待値: } E = \sum_{i=1}^n x_i p_i$$