

数 学

(情—自然情報・理・医・工・農)

2 月 25 日(木) 9 : 00—11 : 00

注 意 事 項

1. 試験開始の合図まで、この冊子を開いてはいけない。
2. 冊子の枚数は表紙を含めて 12 枚(そのうち答案紙 4 枚、数学公式集 3 枚、草稿用紙 4 枚)である。
問題は各答案紙に 1 題ずつ印刷されている。
3. 落丁、乱丁、印刷不鮮明な箇所などがあつたら、ただちに申し出よ。
4. 解答にかかる前にこの冊子左端の折り目をていねいに切り離し、すべての答案紙の所定の 2 箇所に受験番号を記入せよ。
5. 解答は必ず各問題別の答案紙の所定の欄に記入せよ。
6. 草稿用紙のほか、この冊子の答案紙以外の余白は、草稿用に使用してよい。
7. 数学公式集は問題と無関係に、文科系、理科系の区別なく作成されたものであるが、答案作成にあたって利用してよい。
8. 試験終了時刻までは退室してはいけない。
9. 答案紙は持ち帰ってはいけない。その他は持ち帰ってよい。

1

理科系

受 験 番 号

32 数 学

答 案 紙

受験番号

1

1) ベクトル $\vec{a} = (a_1, a_2)$ が次の条件(*)をみたすとき、点 (a_1, a_2) の存在範囲を図示せよ。

(*) あるベクトル $\vec{b} = (b_1, b_2)$ が存在して、 $(\vec{a} \cdot \vec{p})^2 + (\vec{b} \cdot \vec{p})^2 = |\vec{p}|^2$ が
 任意のベクトル $\vec{p}$ に対して成り立つ

2) 1)で求めた $\vec{a} = (a_1, a_2)$ に対して、条件(*)にあるベクトル $\vec{b} = (b_1, b_2)$ を求めよ。

1

(解答欄)

2

理科系

受 験 番 号

32 数 学

答 案 紙

受験番号

- 2 曲線 $C: y = x^3$ 上を動く点 $P(t, t^3)$ (ただし, $t \neq 0$) がある。点 P における C の接線と C とのもう一つの交点を Q とし、点 Q における C の接線と C とのもう一つの交点を R とする。このとき、 $\cos \angle PQR$ のとりうる値の範囲を求めよ。

- 2 (解答欄)

3

理科系

受験番号

32 数学

答 案 紙

受験番号

3 N 個 ($N \geq 2$) の箱の中に 1 回に 1 つずつ無作為に玉を入れてゆく。玉が 2 つ入った箱ができたなら、そこでその手続きを中止する。ちょうど k 回目で玉が 2 つ入った箱ができる確率を $P(N, k)$ とする。

- 1) $2 \leq k \leq N+1$ のとき、 $P(N, k)$ を求めよ。
- 2) $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log P(2N, N+1)$ を区分求積法を用いて求めよ。

3

(解答欄)

答 案 紙

受験番号

4

 n を 2 以上の自然数とする。条件

$$k_1 \geq 1, \dots, k_{n-1} \geq 1, k_n \geq 0$$

をみたす n 個の整数の組 $(k_1, k_2, \dots, k_n)$ に対して、自然数 $m(k_1, k_2, \dots, k_n)$ を次のように定める。

$$m(k_1, k_2, \dots, k_n) = 2^{k_1+k_2+\dots+k_n} - 2^{k_2+\dots+k_n} - 2^{k_3+\dots+k_n} - \dots - 2^{k_n}$$

- 1) $1999 = m(k_1, k_2, k_3, k_4)$ となる (k_1, k_2, k_3, k_4) を求めよ。
- 2) $m(k_1, k_2) = m(\ell_1, \ell_2)$ であれば、 $k_1 = \ell_1, k_2 = \ell_2$ が成り立つことを示せ。
- 3) $n \geq 3$ のとき、 $m(k_1, k_2, \dots, k_n) = m(\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n)$ であれば、 $k_j = \ell_j (j = 1, 2, \dots, n)$ が成り立つことを示せ。

4

(解答欄)

数 学 公 式 集

この公式集は問題と無関係に作成されたものであるが、答案作成にあたって利用してよい。この公式集は持ち帰ってよい。

(不 等 式)

$$1. \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}, \quad \frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}, \quad (a, b, c \text{ は正または } 0)$$

$$2. (a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) \geq (ax + by + cz)^2$$

(三 角 形)

$$3. \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

$$4. a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$5. S = \frac{1}{2} bc \sin A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \quad (s = \frac{1}{2}(a+b+c))$$

(図 形 と 式)

6. 数直線上の2点 x_1, x_2 を $m:n$ に内分および外分する点:

$$\frac{mx_2 + nx_1}{m+n}, \quad \frac{mx_2 - nx_1}{m-n}$$

7. 点 (x_1, y_1) と直線 $ax + by + c = 0$ との距離, および点 (x_1, y_1, z_1) と平面 $ax + by + cz + d = 0$ との距離:

$$\frac{ax_1 + by_1 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \frac{ax_1 + by_1 + cz_1 + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$8. \text{ 円 } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ 上の点 } (x_1, y_1) \text{ における接線: } \frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = 1$$

$$9. \text{ 双曲線 } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ 上の点 } (x_1, y_1) \text{ における接線: } \frac{x_1 x}{a^2} - \frac{y_1 y}{b^2} = 1$$

(ベクトルと行列)

$$10. \text{ 2つのベクトルのなす角: } \cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$$

$$11. \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}, \quad (ad - bc \neq 0)$$

(複 素 数)

$$12. \text{ 極形式表示: } z = r(\cos \theta + i \sin \theta), \quad (r = |z|, \quad \theta = \arg z)$$

$$13. z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1), \quad z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) \text{ に対し,}$$

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 \{ \cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2) \}$$

$$14. \text{ ド・モアブルの公式: } z = r(\cos \theta + i \sin \theta) \text{ に対し,}$$

$$z^n = r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta)$$

(対 数)

$$15. \log_a M = \frac{\log_b M}{\log_b a}$$

(三 角 関 数)

$$16. \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$17. \tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

$$18. \cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$$

$$19. \sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \{ \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) \}$$

$$\cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} \{ \sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) \}$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \{ \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) \}$$

$$\sin \alpha \sin \beta = -\frac{1}{2} \{ \cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) \}$$

$$20. \sin A + \sin B = 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$$

$$\sin A - \sin B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$$

$$\cos A + \cos B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$$

$$\cos A - \cos B = -2 \sin \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$$

$$21. a \sin \theta + b \cos \theta = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\theta + \alpha), \quad (\sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}})$$

(数 列)

$$22. \text{ 初項 } a, \text{ 公差 } d, \text{ 項数 } n \text{ の等差数列の和: } S_n = \frac{1}{2} n(a + l) = \frac{1}{2} n \{ 2a + (n-1)d \}, \quad (l = a + (n-1)d)$$

$$23. \text{ 初項 } a, \text{ 公比 } r, \text{ 項数 } n \text{ の等比数列の和: } S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}, \quad (r \neq 1)$$

$$24. 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left\{ \frac{1}{2} n(n+1) \right\}^2$$

(極 限)

$$25. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e = 2.71828 \cdots$$

$$26. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

(微 積 分)

$$27. \{f(g(x))\}' = f'(g(x))g'(x)$$

$$28. x = f(y) \text{ のとき } \frac{dy}{dx} = \left(\frac{dx}{dy}\right)^{-1}$$

$$29. x = x(t), y = y(t) \text{ のとき } \frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)}$$

$$30. (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, (\log x)' = \frac{1}{x}$$

$$31. \int f(g(t))g'(t)dt = \int f(x)dx$$

$$32. \int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$$

$$33. \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \log |f(x)| + C$$

$$34. \int \log x dx = x \log x - x + C$$

$$35. \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{4} \pi a^2 (a > 0), \int_0^a \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{\pi}{4a}$$

$$36. \text{回転体の体積: } V = \pi \int_a^b \{f(x)\}^2 dx$$

$$37. \text{曲線の長さ: } \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt, (x = x(t), y = y(t), a = x(\alpha), b = x(\beta))$$

(順列・組合せ)

$$38. {}_n C_r = {}_{n-1} C_r + {}_{n-1} C_{r-1}, (1 \leq r \leq n-1)$$

$$39. (a+b)^n = \sum_{r=0}^n {}_n C_r a^{n-r} b^r$$

(確 率)

$$40. \text{確率 } p \text{ の事象が } n \text{ 回の試行中 } r \text{ 回起る確率: } P_r = {}_n C_r p^r q^{n-r}, (q = 1-p)$$

$$41. \text{期待値: } E = \sum_{i=1}^n x_i p_i$$