

- (1) 2回で終了するのは、1回目と2回目の目が(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)となるときだけだから、

$$p_2 = \frac{5}{6^2} = \frac{5}{36} \quad \cdots \text{ (答)}$$

- (2) 2回で終了しなかったとき、止まっている点は2, 3, 4, 5, 6, 7のいずれかであり、これらのすべてについて次の回で終了する確率は $\frac{1}{6}$ だから、 $p_3 = \frac{1}{6}(1 - p_2) = \frac{31}{216} \quad \cdots \text{ (答)}$

- (3) $n \geq 2$ に対し、 n 回までで終了しなかったとき、止まっている点は2, 3, 4, 5, 6, 7のいずれかであり、これらのすべてについて次の回で終了する確率は $\frac{1}{6}$ だから、

$$p_{n+1} = \frac{1}{6}(1 - p_2 - p_3 - \cdots - p_n) \quad (n \geq 2) \quad \cdots \text{①}$$

$$\text{よって、} p_n = \frac{1}{6}(1 - p_2 - p_3 - \cdots - p_{n-1}) \quad (n \geq 3) \quad \cdots \text{②}$$

として、

$$\text{①} - \text{②} = p_{n+1} - p_n = -\frac{1}{6} p_n \quad (n \geq 3)$$

$$\therefore p_{n+1} = \frac{5}{6} p_n \quad (n \geq 3)$$

$$\therefore p_n = p_3 \left(\frac{5}{6} \right)^{n-3} = \frac{31}{216} \left(\frac{5}{6} \right)^{n-3} \quad (n \geq 4) \quad \cdots \text{ (答)}$$

$$\begin{aligned}
 (1) \quad (i) &\iff \begin{cases} x - z = a + b \\ 2y - 2z = a - c \\ 2(x + y - 2z) = 6a \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} x - z = a + b & \cdots \textcircled{1} \\ 2y - 2z = a - c & \cdots \textcircled{2} \\ 2(z + a + b) + 2z + a - c - 4z = 6a & \cdots \textcircled{3} \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$\text{ここで, } \textcircled{3} \iff 3a - 2b + c = 0 \quad \cdots \textcircled{4}$$

となるから, この条件が必要であり, 逆にこれが成り立つとき,

①, ②より, $z = t$ とすると, 解は

$$(x, y, z) = (t + a + b, t + 2a - b, t) \quad (t \text{ は実数}) \quad \cdots \textcircled{5}$$

となり十分。

よって, (i)が解をもつための条件は④で, 解は⑤で与えられる。

(2) ⑤を②に代入して,

$$\begin{aligned}
 (t + a + b)^2 + (t + 2a - b)^2 + t^2 &= 1 \\
 \iff 3t^2 + 6at + (a + b)^2 + (2a - b)^2 - 1 &= 0 \quad \cdots \textcircled{6}
 \end{aligned}$$

この方程式が t についてただ一つの解をもてばよいから, 判別式を考えて,

$$\begin{aligned}
 9a^2 - 3\{(a + b)^2 + (2a - b)^2 - 1\} &= 0 \\
 \therefore 2a^2 - 2ab + 2b^2 &= 1 \quad \cdots \textcircled{7}
 \end{aligned}$$

このとき, ⑥の解は $t = -a$ となるから, 共通解は,

$(x, y, z) = (b, a - b, -a)$ となり, この解に対し, ⑦より,

$$\begin{aligned}
 2x^2 + 2xy + 2y^2 &= x^2 + y^2 + (x + y)^2 = b^2 + (a - b)^2 + a^2 \\
 &= 2a^2 - 2ab + 2b^2 = 1 \quad (\text{証明終})
 \end{aligned}$$

(1)

(i) $n=0, 1$ のとき,

$$\begin{cases} f_0(2\cos\theta)=2 \\ f_1(2\cos\theta)=2\cos\theta \end{cases}$$

により成り立つ。

(ii) $n=k-1, k$ のとき成り立つと仮定すると、漸化式より、

$$\begin{aligned} f_{k+1}(2\cos\theta) &= 2\cos\theta f_k(2\cos\theta) - f_{k-1}(2\cos\theta) \\ &= 2\cos\theta \cdot 2\cos k\theta - 2\cos(k-1)\theta \\ &= 2(2\cos k\theta \cos\theta - \cos(k-1)\theta) \end{aligned}$$

ここで、 $\cos(k+1)\theta + \cos(k-1)\theta = 2\cos k\theta \cos\theta$ であるから、

$$f_{k+1}(2\cos\theta) = 2\cos(k+1)\theta \text{ となり、} n=k+1 \text{ のときも成り立つ。}$$

(i)(ii)より、数学的帰納法により、 $n=0, 1, 2, \dots$ に対し、

$$f_n(2\cos\theta) = 2\cos n\theta \quad (\text{証明終})$$

(2) $x=2\cos\theta$ ($0 \leq \theta \leq \pi$) と変数変換すると、 $f_n(2\cos\theta)=0$ の最小解 θ_n に対し、 $x_n=2\cos\theta_n$ が成り立つ。

ここで(1)より、

$$f_n(x)=0 \iff \cos n\theta=0$$

$$\iff n\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k=0, \dots, n-1)$$

$$\text{となるから、} \theta_n = \frac{\pi}{2n}$$

よって、この置換により

$$\begin{aligned} \int_{x_n}^2 f_n(x) dx &= \int_{\theta_n}^0 2\cos n\theta (-2\sin\theta) d\theta \\ &= -2 \int_{\theta_n}^0 \{\sin(n+1)\theta - \sin(n-1)\theta\} d\theta \\ &= 2 \left[\frac{1}{n+1} \cos(n+1)\theta - \frac{1}{n-1} \cos(n-1)\theta \right]_{\theta_n}^0 \\ &= \frac{2}{n^2-1} \left\{ (n-1) \left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2n}\right) \right) - (n+1) \left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2n}\right) \right) \right\} \\ &= \frac{2}{n^2-1} \left\{ n \left(-\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2n}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2n}\right) \right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2n}\right) \right. \\ &\quad \left. + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2n}\right) - 2 \right\} \\ &= \frac{2}{n^2-1} \left(2n \sin \frac{\pi}{2n} - 2 \right) = \frac{4}{n^2-1} \left(n \sin \frac{\pi}{2n} - 1 \right) \quad \dots \text{ (答)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \int_{x_n}^2 f_n(x) dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2}{n^2-1} \left(2n \sin \frac{\pi}{2n} - 2 \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{1 - \frac{1}{n^2}} \left(\pi \frac{\sin \frac{\pi}{2n}}{\frac{\pi}{2n}} - 2 \right) \\ &= 2(\pi - 2) \quad \dots \text{ (答)} \end{aligned}$$

- (a) 円 C_1, C_2, C_3, C の中心をそれぞれ O_1, O_2, O_3, A とすると、 $\triangle O_1O_2O_3$ は二等辺三角形となり、点 M を線分 O_1O_2 の中点とすると、 $2a < 1$ であり、

$$O_3M = \sqrt{(3a)^2 - a^2} = 2\sqrt{2}a$$

$$O_3M = O_3A + AM$$

$$= 1 - 2a + \sqrt{(1-a)^2 - a^2}$$

$$= 1 - 2a + \sqrt{1-2a}$$

よって、

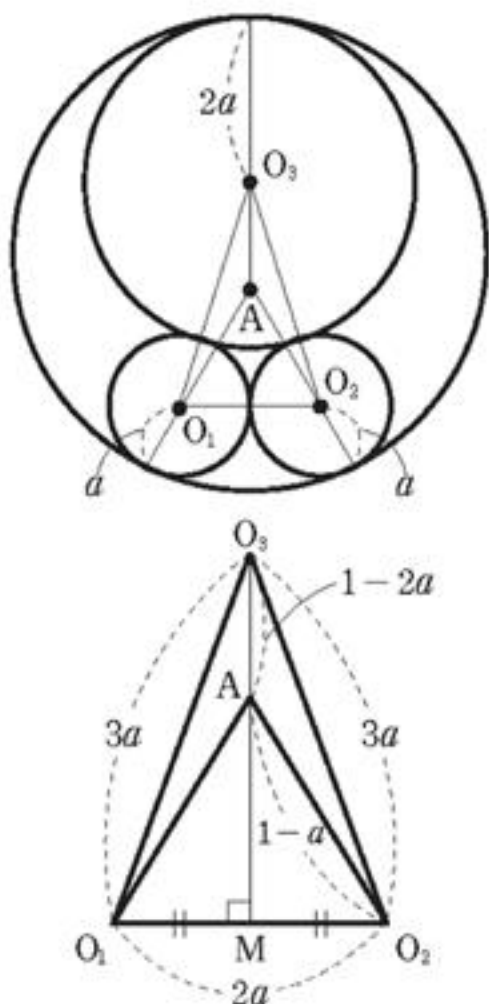
$$2(\sqrt{2}+1)a - 1 = \sqrt{1-2a}$$

$$4(\sqrt{2}+1)^2 a^2 - 4(\sqrt{2}+1)a + 1 = 1 - 2a$$

$$a\{4(\sqrt{2}+1)^2 a - 2(2\sqrt{2}+1)\} = 0$$

$a \neq 0$ より、

$$a = \frac{2(2\sqrt{2}+1)}{4(\sqrt{2}+1)^2} = \frac{4\sqrt{2}-5}{2} \quad \dots \text{ (答)}$$



- (b) (i) $x_1 = x_2 = 1, x_3 = a + b$ より、 x_2 と x_1, x_3 と x_2 はともに互いに素である。

(ii) $k \geq 3$ に対し、 x_k と x_{k-1} が互いに素である。 …①

と仮定する。このとき、 $x_k > 1$ だから、漸化式より、

$$x_{k+1} \equiv bx_{k-1} \pmod{x_k}$$

(ただし、「 $l \equiv m \pmod{j}$ 」は l, m を $j (> 1)$ で割ったときの余りが等しいことを表す。)

したがって、仮定①により、 $n \geq 3$ に対し、 x_n と b が互いに素である …② ことが示されれば x_{k+1} と x_k は互いに素となり、(i)(ii) から数学的帰納法により証明が完了する。以下、②を示す。

(iii) $n = 3$ のとき、 $x_3 = a + b \equiv a \pmod{b}$

であり、 a と b が互いに素であることから、 x_3 と b も互いに素になる。

(iv) $k \geq 3$ に対し、 x_k と b が互いに素である …③ と仮定すると、漸化式より、 $x_{k+1} \equiv ax_k \pmod{b}$

したがって、 a と b が互いに素であることと、仮定③により、 x_{k+1} と b は互いに素である。

(iii)(iv) から、数学的帰納法により②が成り立ち、すべての正の整数 n に対して x_{n+1} と x_n は互いに素である。(証明終)