

- (1) 2回で終了するのは、1回目と2回目の目が(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)となるときだけだから、

$$p_2 = \frac{5}{6^2} = \frac{5}{36} \quad \cdots \text{ (答)}$$

- (2) 2回で終了しなかったとき、止まっている点は2, 3, 4, 5, 6, 7のいずれかであり、これらのすべてについて次の回で終了する

$$\text{確率は } \frac{1}{6} \text{ だから, } p_3 = \frac{1}{6}(1 - p_2) = \frac{31}{216} \quad \cdots \text{ (答)}$$

- (3) 3回までで終了しなかったとき、止まっている点は3, 4, 5, 6, 7のいずれかであり、これらのすべてについて次の回で終了する

$$\text{確率は } \frac{1}{6} \text{ だから,}$$

$$p_4 = \frac{1}{6}(1 - p_2 - p_3) = \frac{155}{1296} \quad \cdots \text{ (答)}$$

- (1) $f'(x) = 3x^2 + 2ax + 3a - 6$ であるから, $y = f(x)$ が $\checkmark$ もつための条件は, 二次方程式 $f'(x) = 0$ が相異なる 2 つの解をもつことで, さらにそれは, 判別式 D が $D > 0$ をみたすことと同値。よって,

$$\begin{aligned}\frac{D}{4} &= a^2 - 3(3a - 6) = a^2 - 9a + 18 \\ &= (a - 3)(a - 6) > 0\end{aligned}$$

$$\therefore a < 3, 6 < a \quad \cdots \text{ (答)}$$

- (2) p, q は二次方程式 $f'(x) = 0$ の 2 解だから, 解と係数の関係より,

$$\begin{cases} p + q = -\frac{2}{3}a \\ pq = a - 2 \end{cases}$$

よって,

$$\begin{aligned}m &= \frac{f(p) - f(q)}{p - q} \\ &= \frac{p^3 - q^3 + a(p^2 - q^2) + 3(a - 2)(p - q)}{p - q} \\ &= p^2 + pq + q^2 + a(p + q) + 3(a - 2) \\ &= (p + q)^2 - pq + a(p + q) + 3(a - 2) \\ &= \frac{4}{9}a^2 - \frac{2}{3}a^2 + 2(a - 2) \\ &= -\frac{2}{9}(a^2 - 9a + 18) \\ &= -\frac{2}{9}(a - 3)(a - 6) \quad \cdots \text{ (答)}\end{aligned}$$

(a)

- (1) 漸化式は、
- $z_{n+1} + 1 = (1+i)(z_n + 1)$
- (
- $n \geq 1$
-)

と変形できるから、

$$\begin{aligned}
 z_n + 1 &= (1+i)(z_{n-1} + 1) \\
 &= \cdots \\
 &= (1+i)^{n-1}(z_1 + 1) \\
 &= 4(1+i)^{n-1} \quad (n \geq 2) \quad \cdots \textcircled{1}
 \end{aligned}$$

この式は $n=1$ のときも成り立つから、

$$z_n = 4(1+i)^{n-1} - 1 \quad (n \geq 1) \quad \cdots \text{(答)}$$

- (2)
- $z_{8m-7} = 4(1+i)^{8(m-1)} - 1$

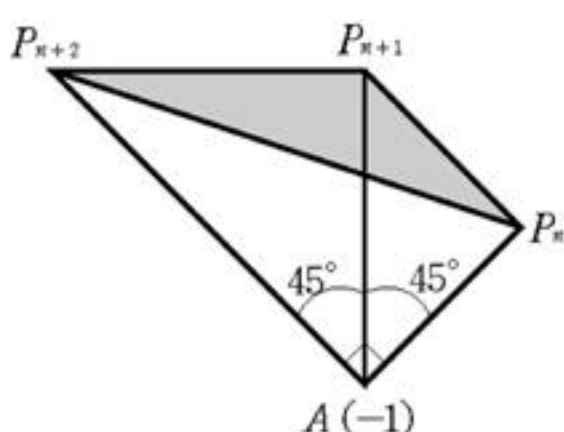
$$\begin{aligned}
 \text{ここで、} (1+i)^8 &= \{\sqrt{2}(\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ)\}^8 \\
 &= 2^4(\cos 360^\circ + i \sin 360^\circ) \\
 &= 2^4
 \end{aligned}$$

$$\text{より、} z_{8m-7} = 4 \cdot 2^4(m-1) - 1 = 2^{4m-2} - 1 \quad (\text{証明終})$$

- (3) ①より、

$$\begin{cases} |z_n + 1| = 4(\sqrt{2})^{n-1} = 2^{\frac{n+3}{2}} \\ \arg(z_n + 1) = (n-1) \times 45^\circ \end{cases}$$

であるから、 -1 が表す点を A とすると、右図のような位置関係になるから、



$$\begin{aligned}
 \triangle P_n P_{n+1} P_{n+2} &= \triangle A P_n P_{n+1} + \triangle A P_{n+1} P_{n+2} - \triangle A P_n P_{n+2} \\
 &= \frac{1}{2} 2^{\frac{n+3}{2}} \cdot 2^{\frac{n+4}{2}} \sin 45^\circ + \frac{1}{2} 2^{\frac{n+4}{2}} \cdot 2^{\frac{n+5}{2}} \sin 45^\circ - \frac{1}{2} 2^{\frac{n+3}{2}} \cdot 2^{\frac{n+5}{2}} \\
 &= \frac{1}{2} (2^{n+3} + 2^{n+4} - 2^{n+4}) \\
 &= 2^{n+2}
 \end{aligned}$$

(b)

- (1)
- $b+c=0$
- より、
- $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & d \end{pmatrix}$
- となるから、

$$A^2 = \begin{pmatrix} a^2 - b^2 & b(a+b) \\ -b(a+d) & d^2 - b^2 \end{pmatrix}$$

これが $-E$ に等しいことから、 $(1, 1)$ 成分と $(1, 2)$ 成分について、

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = -1 \quad \cdots \textcircled{1} \\ b(a+d) = 0 \quad \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

a, b は整数だから、①が成り立つのは $a=0, b^2=1$ のときのみで、 $b \geq 0$ より、 $b=1$ となる。よって、②より、 $a+d=0$ となるから、

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \cdots \text{(答)}$$

となり、これは確かに $A^2 = -E$ をみたす。

- (2)
- $B^2 = (\sqrt{3}A - E)^2 = 3A^2 - 2\sqrt{3}A + E$

$$= -2(\sqrt{3}A + E)$$

$$B^3 = -2(\sqrt{3}A + E)(\sqrt{3}A - E) = -2(3A^2 - E) = 8E$$

$$= 2^3 E$$

より、求める n は 3 $\cdots$ (答)

- (3) 自然数
- m
- に対し、

$$\begin{cases} B^{3m} = (B^3)^m = 2^{3m} E \\ B^{3m-2} = (B^3)^{m-1} \cdot B = 2^{3(m-1)} (\sqrt{3}A - E) \\ B^{3m-1} = (B^3)^{m-1} \cdot B^2 = 2^{3(m-1)} (-2)(\sqrt{3}A + E) \\ \qquad \qquad \qquad = -2^{3m-2} (\sqrt{3}A + E) \end{cases}$$

となるから、

$$p_n = \begin{cases} 2^{3m} & (n=3m) \\ -2^{3m-3} & (n=3m-2) \\ -2^{3m-2} & (n=3m-1) \end{cases} \quad \cdots \text{(答)}$$

$$q_n = \begin{cases} 0 & (n=3m) \\ 2^{3m-3} \sqrt{3} & (n=3m-2) \\ -2^{3m-2} \sqrt{3} & (n=3m-1) \end{cases}$$