

数 学

2 月 25 日(水) 12 : 30—14 : 00

注 意 事 項

1. 試験開始の合図まで、この冊子を開いてはいけない。
2. 冊子の枚数は表紙を含めて 12 枚(そのうち答案紙 4 枚、数学公式集 3 枚、草稿用紙 4 枚)である。
問題は各答案紙に 1 題ずつ印刷されている。
3. 落丁、乱丁、印刷不鮮明な箇所などがあつたら、ただちに申し出よ。
4. 解答にかかる前にこの冊子左端の折り目をていねいに切り離し、すべての答案紙の所定の 2 箇所に受験番号を記入せよ。
5. 解答は必ず各問題別の答案紙の表の所定の欄に記入し、裏に記入してはいけない。
6. 草稿用紙のほか、この冊子の答案紙以外の余白は、草稿用に使用してよい。
7. 数学公式集は問題と無関係に、文科系、理科系の区別なく作成されたものであるが、答案作成にあたって利用してよい。
8. 試験終了時刻までは退室してはいけない。
9. 答案紙は持ち帰ってはいけない。その他は持ち帰ってよい。
10. 問題**3**は選択問題であり、(a)、(b)の 2 題からなるが、いずれかの 1 題だけを解答するものとする。**3**の答案として 1 題だけを提出する。他方の答案紙は、大きく斜線を引いたうえで、最後に提出する。

1

経 済

受 験 番 号				

36 数 学

--

答 案 紙

受験番号					
------	--	--	--	--	--

- 1 サイコロの出た目の数だけ数直線を正の方向に移動するゲームを考える。ただし、8をゴールとしてちょうど8の位置へ移動したときにゲームを終了し、8をこえた分についてはその数だけ戻る。たとえば、7の位置で3が出た場合、8から2戻って6へ移動する。なお、サイコロは1から6までの目が等確率で出るものとする。原点から始めて、サイコロを n 回投げ終えたときに8へ移動してゲームを終了する確率を p_n とおく。
- (1) p_2 を求めよ。
- (2) p_3 を求めよ。
- (3) p_4 を求めよ。

1 (解答欄)

2

経 済

受 験 番 号				

36 数 学

答 案 紙

受験番号					
------	--	--	--	--	--

2 a を実数とする。 $f(x) = x^3 + ax^2 + (3a - 6)x + 5$ について以下の問いに答えよ。

- (1) 関数 $y = f(x)$ が極値をもつ a の範囲を求めよ。
- (2) 関数 $y = f(x)$ が極値をもつ a に対して、関数 $y = f(x)$ は $x = p$ で極大値、 $x = q$ で極小値をとるとする。
関数 $y = f(x)$ のグラフ上の 2 点 $P(p, f(p))$ 、 $Q(q, f(q))$ を結ぶ直線の傾き m を a を用いて表せ。

2 (解答欄)

3

(a)

経 済

受 験 番 号				

(a)

36 数 学

--

答 案 紙

受験番号					
------	--	--	--	--	--

第3問は選択問題である。つぎの[3](a)または別紙の[3](b)のいずれか一方を選んで解答せよ。

3

(a) i を虚数単位とする。 $z_1 = 3$ および、漸化式 $z_{n+1} = (1+i)z_n + i$ ($n \geq 1$) によって定まる複素数からなる数列 $\{z_n\}$ について、以下の問いに答えよ。

- (1) z_n を求めよ。
- (2) すべての正の整数 m について、 $z_{8m-7} = 2^{4m-2} - 1$ となることを示せ。
- (3) 複素数 z_n が表す複素数平面の点を P_n とする。 P_n, P_{n+1}, P_{n+2} を3頂点とする三角形の面積を求めよ。

3

(a) (解答欄)

3

(b)

経 済

受 験 番 号				

(b)

--

36 数 学

答 案 紙

受験番号					
------	--	--	--	--	--

第3問は選択問題である。つぎの3(b)または別紙の3(a)のいずれか一方を選んで解答せよ。

3

(b) E を2次の単位行列とする。整数 a, b, c, d を成分とする行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が $A^2 = -E, b + c = 0, b \geq 0$ という条件をみたすとする。また、 $B = \sqrt{3}A - E$ とおく。

- (1) 行列 A を求めよ。
- (2) $B^n = 2^n E$ をみたす正の整数 n で最小のものを求めよ。
- (3) 正の整数 n に対して $B^n = p_n E + q_n A$ をみたす実数 p_n と q_n を求めよ。

3

(b) (解答欄)

数 学 公 式 集

この公式集は問題と無関係に作成されたものであるが、答案作成にあたって利用してよい。この公式集は持ち帰ってよい。

(不 等 式)

1. $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$, $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$, (a, b, c は正または0)
2. $(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) \geq (ax + by + cz)^2$

(三 角 形)

3. $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$
4. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$
5. $S = \frac{1}{2} bc \sin A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, ($s = \frac{1}{2}(a+b+c)$)

(図 形 と 式)

6. 数直線上の2点 x_1, x_2 を $m:n$ に内分および外分する点:
 $\frac{mx_2 + nx_1}{m+n}$, $\frac{mx_2 - nx_1}{m-n}$
7. 点 (x_1, y_1) と直線 $ax + by + c = 0$ との距離, および点 (x_1, y_1, z_1) と平面 $ax + by + cz + d = 0$ との距離:
 $\frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, $\frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$
8. だ円 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 上の点 (x_1, y_1) における接線: $\frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = 1$
9. 双曲線 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 上の点 (x_1, y_1) における接線: $\frac{x_1 x}{a^2} - \frac{y_1 y}{b^2} = 1$

(ベクトルと行列)

10. 2つのベクトルのなす角: $\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$
11. $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$, ($ad - bc \neq 0$)

(複 素 数)

12. 極形式表示: $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$, ($r = |z|$, $\theta = \arg z$)
13. $z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$, $z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$ に対し, $z_1 z_2 = r_1 r_2 \{\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)\}$
14. ド・モアブルの公式: $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ に対し, $z^n = r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta)$

(解と係数の関係)

15. $x^2 + px + q = 0$ の解が α , β のとき, $\alpha + \beta = -p$, $\alpha\beta = q$
16. $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ の解が α , β , γ のとき, $\alpha + \beta + \gamma = -p$, $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = q$, $\alpha\beta\gamma = -r$

(対 数)

17. $\log_a M = \frac{\log_b M}{\log_b a}$

(三 角 関 数)

18. $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$
 $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$
19. $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$
20. $\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$
21. $\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \{ \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) \}$
 $\cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} \{ \sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) \}$
 $\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \{ \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) \}$
 $\sin \alpha \sin \beta = -\frac{1}{2} \{ \cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) \}$
22. $\sin A + \sin B = 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$
 $\sin A - \sin B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$
 $\cos A + \cos B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$
 $\cos A - \cos B = -2 \sin \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$
23. $a \sin \theta + b \cos \theta = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\theta + \alpha)$, ($\sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, $\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$)

(数 列)

24. 初項 a , 公差 d , 項数 n の等差数列の和: $S_n = \frac{1}{2} n(a + l) = \frac{1}{2} n \{ 2a + (n-1)d \}$, ($l = a + (n-1)d$)
25. 初項 a , 公比 r , 項数 n の等比数列の和: $S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$, ($r \neq 1$)
26. $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$
 $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left\{ \frac{1}{2} n(n+1) \right\}^2$

(極 限)

$$27. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e = 2.71828\cdots$$

$$28. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

(微 積 分)

$$29. \{f(g(x))\}' = f'(g(x))g'(x)$$

$$30. x = f(y) \text{ のとき } \frac{dy}{dx} = \left(\frac{dx}{dy}\right)^{-1}$$

$$31. x = x(t), y = y(t) \text{ のとき } \frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)}$$

$$32. (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, (\log x)' = \frac{1}{x}$$

$$33. x = g(t) \text{ のとき } \int f(g(t))g'(t)dt = \int f(x)dx$$

$$34. \int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$$

$$35. \int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \log |f(x)| + C$$

$$36. \int \log x dx = x \log x - x + C$$

$$37. \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{4} \pi a^2 \quad (a > 0), \quad \int_0^a \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{\pi}{4a} \quad (a \neq 0), \quad \int_a^\beta (x - a)(x - \beta)dx = -\frac{1}{6}(\beta - a)^3$$

$$38. \text{回転体の体積: } V = \pi \int_a^b \{f(x)\}^2 dx$$

$$39. \text{曲線の長さ: } \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int_a^\beta \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt, \quad (x = x(t), y = y(t), a = x(\alpha), b = x(\beta))$$

(順 列 ・ 組 合 せ)

$$40. {}_n C_r = {}_{n-1} C_r + {}_{n-1} C_{r-1}, \quad (1 \leq r \leq n-1)$$

$$41. (a + b)^n = \sum_{r=0}^n {}_n C_r a^{n-r} b^r$$

(確 率)

$$42. \text{確率 } p \text{ の事象が } n \text{ 回の試行中 } r \text{ 回起る確率: } P_n(r) = {}_n C_r p^r q^{n-r}, \quad (q = 1 - p)$$

$$43. \text{期待値: } E(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_i, \text{ ただし } p_i \text{ は確率変数 } X \text{ が値 } x_i \text{ をとる確率で, } \sum_{i=1}^n p_i = 1 \text{ をみたすとする。}$$