



$-x^2+6=x \Leftrightarrow x^2+x-6=(x-2)(x+3)=0$
 より、A, Bの座標は $(-3, -3)$ $(2, 2)$ とする。
 よって Tは、

$$\begin{aligned} T &= \int_{-3}^2 (-x^2+6-x) dx = \int_{-3}^2 -(x-2)(x+3) dx \\ &= \left[-\frac{1}{2}(x-2)^2(x+3) + \frac{7}{6}(x-2)^3 \right]_{-3}^2 \\ &= -\frac{1}{6}(-3-2)^3 \\ &= \frac{125}{6} \end{aligned}$$

答 $\frac{125}{6}$

(2) $-x^2+6=x+t \Leftrightarrow x^2+x+(t-6)=0$ より、C, Dのx座標は $\frac{-1 \pm \sqrt{25-4t}}{2}$ である。
 $y=x+t$ は放物線 R と 2点で交わる必要がないので、 $0 < t < \frac{25}{4}$
 AB間 CD間の幅はそれぞれ AとB, CとDのx座標差の $\sqrt{2}$ 倍。
 よって $\begin{cases} AB=5\sqrt{2} \\ CD=\sqrt{50-4t} \end{cases}$ である。又、 $y=x$ と $y=x+t$ の2直線間の幅は $\frac{t}{\sqrt{2}}$ と表すことができる。

よって

$$S(t) = (5\sqrt{2} + \sqrt{50-4t}) \cdot \frac{t}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{2} = \frac{(5\sqrt{2} + \sqrt{50-4t})t}{2\sqrt{2}} = \frac{(5 + \sqrt{25-4t})t}{2}$$

$f(t) = \frac{S(t)}{t}$ の最大値は T一定より $S(t)$ の最大値を求めればわかる。

そこで、 $\sqrt{25-4t} = S$ (S 定数 $0 < S < 5$) とおくと、

$$25-4t = S^2 \Leftrightarrow t = \frac{25}{4} - \frac{1}{4}S^2 \text{ である。}$$

$$g(S) = (5 + \sqrt{25-4t})t = (5+S) \left(\frac{25}{4} - \frac{1}{4}S^2 \right) \text{ とおくと、}$$

$$g'(S) = -\frac{1}{4}(S+5)(S-5) \text{ より 増減表は 下図。}$$

S	0		5		5
$g'(S)$		+	0	-	
$g(S)$		↗	$\frac{500}{27}$	↘	

よって $g(S)$ は $S=\frac{5}{3}$ のときに最大値 $\frac{500}{27}$ をとる。

よって $S(t)$ は $S=\frac{5}{3}$ となる $t = \frac{50}{9}$ のとき最大値 $\frac{500}{27}$ をとる。

(1)より $T = \frac{125}{6}$ となるので、 $f(t)$ は、 $t = \frac{50}{9}$ のときに最大値

$$\frac{500}{27T} = \frac{8}{9} \text{ をとる。}$$

答 $t = \frac{50}{9}$ のとき 最大値 $\frac{8}{9}$ をとる。

$$(1) f(x, y) = \log_3(x+y) - \log_3 x - \log_3 y + 1 = \log_3 \frac{x+y}{x \cdot y} + 1$$

このとき、 $f(x, y) = 0$ であるためには

$$\log_3 \frac{x+y}{x \cdot y} = -1 \Leftrightarrow \frac{x+y}{x \cdot y} = \frac{1}{3} \text{ が必要}$$

これを变形して、

$$x \cdot y - 3x - 3y = 0 \Leftrightarrow (x-3)(y-3) = 9 \text{ である。}$$

x, y はそれぞれ 1~13 の整数なので、 $(x-3), (y-3)$ は -2~10 の整数である。これらの条件を満たす $(x-3), (y-3)$ は

$$\begin{cases} (x-3)=1 \\ (y-3)=9 \end{cases} \quad \begin{cases} (x-3)=9 \\ (y-3)=1 \end{cases} \quad \begin{cases} (x-3)=3 \\ (y-3)=3 \end{cases} \text{ の 3通り。}$$

よって x, y の組み合わせは

$$\text{答 } \begin{cases} x=4 \\ y=12 \end{cases} \quad \begin{cases} x=12 \\ y=4 \end{cases} \quad \begin{cases} x=6 \\ y=6 \end{cases}$$

(2)

52枚のカードから11順に2枚カードをとり出す方法は
52×51通り

11順に4, 12のカードをとり出す方法

4×4通り

11順に12, 4のカードをとり出す方法

4×4通り

11順に6, 6のカードをとり出す方法

4×3通り

よって $f(x, y) = 0$ となる確率は、

$$\frac{4 \times 4 + 4 \times 4 + 4 \times 3}{52 \times 51} = \frac{11}{663}$$

$$\text{答 } \frac{11}{663}$$

[3(4)]

$$(1). z = r(\cos \theta + i \sin \theta) \quad (r > 0) \text{ とおす.}$$

$$z^6 = r^6 (\cos 6\theta + i \sin 6\theta) \dots \textcircled{1}$$

$$\text{また, } 64 = 2^6 (\cos 0^\circ + i \sin 0^\circ) = \textcircled{2}$$

$$z^6 = 64 \text{ とおす. } \textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ より}$$

$$\begin{cases} r = 2 \\ 6\theta = 360^\circ \times n \end{cases}$$

$$\therefore r = 2, \theta = 60^\circ \times n$$

$$n = 0, 1, 2, 3, 4, 5 \text{ を代入して}$$

$$z \rightarrow 2 (\cos 0^\circ + i \sin 0^\circ), 2 (\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ),$$

$$2 (\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ), 2 (\cos 180^\circ + i \sin 180^\circ)$$

$$2 (\cos 240^\circ + i \sin 240^\circ), 2 (\cos 300^\circ + i \sin 300^\circ)$$

$$\therefore \underline{z = 2, 1 + \sqrt{3}i, -(1 + \sqrt{3}i), -2, -1 - \sqrt{3}i, -1 + \sqrt{3}i.}$$

$$(2). x^3 + \sqrt{3}x^2 + x^2 - 2 = 0 \text{ --- } \textcircled{A}$$

$$i) z = 2 \text{ のとき}$$

$$\textcircled{A} \text{ は } x^2 - 2 = 0 \text{ となる.}$$

これは整数解をもたない。

$$ii) z = 1 + \sqrt{3}i \text{ のとき}$$

$$\textcircled{A} \text{ は } x^2 + 3x + 2 = 0.$$

$$f(x) = x^2 + 3x + 2 \text{ とおす}$$

$$f'(x) = 2(x + \frac{3}{2}) > 0 \quad f(x) \text{ は常に増加している.}$$

$$\text{また, } f(-1) = -2, f(0) = 2 \text{ より 整数解をもたない.}$$

$$iii) z = -(1 + \sqrt{3}i) \text{ のとき } \textcircled{A} \text{ は } x^2 - 3x + 4 = 0.$$

$$x = 1 \text{ のとき 成立する.}$$

$$iv) z = -2 \text{ のとき } \textcircled{A} \text{ は } x^2 + 2 = 0 \text{ これは整数解をもたない.}$$

$$v) z = -1 - \sqrt{3}i \text{ のとき } \textcircled{A} \text{ は } x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$f(x) = x^2 - 3x + 2 \text{ とおす}$$

$$f'(x) = 2(x - \frac{3}{2})$$

$$\text{最小値は } x = \frac{3}{2} \text{ であり 整数解をもたない.}$$

$$vi) z = 1 - \sqrt{3}i \text{ のとき } \textcircled{A} \text{ は } x^2 + 3x + 4 = 0.$$

$$x = -1 \text{ のとき 成立する.}$$

$$\therefore \underline{z = -(1 + \sqrt{3}i), -1 - \sqrt{3}i \text{ のとき}}$$

成立する。