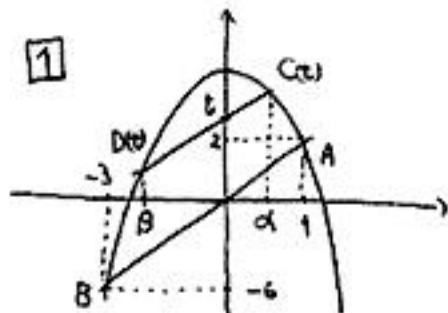


①



$$(1) \begin{cases} y = -x^2 + 3 \\ y = 2x \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{よ} \quad x^2 + 2x - 3 &= 0 \\ \therefore (x+3)(x-1) &= 0 \\ x &= 1, -3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{よて} \\ T &= \frac{|1-1|}{6} (1+3)^3 \\ &= \frac{32}{3} \end{aligned}$$

(2) A, B, C(t), D(t) を上図のおにみき。C(t), D(t) のス図標を α, β とおく。

$$\begin{cases} y = -x^2 + 3 \\ y = 2x + t \end{cases} \quad \text{よ} \quad \alpha, \beta \text{ は} \quad x^2 + 2x + t - 3 = 0 \dots \textcircled{1}$$

の 2 解である。

また、 α, β は 相異なるので ① の判別式は正なり

$$\begin{aligned} D/4 &= 1 - (t-3) \\ &= 4-t \end{aligned} \quad \therefore 0 < t < 4.$$

四角形 ABD(t) C(t) の高さは、 x 軸と 直線 $y = 2x + t$ の距離なり

$$\frac{|2 \cdot 0 - 0 + t|}{\sqrt{2^2 + 1}} = \frac{t}{\sqrt{5}}$$

$$\begin{aligned} D(t)C(t) &= \sqrt{(\alpha - \beta)^2 + \{(-\alpha^2 + 3) - (-\beta^2 + 3)\}^2} \\ &= (\alpha - \beta) \sqrt{1 + (\alpha + \beta)^2} \\ &= 2\sqrt{5} \sqrt{4-t} \end{aligned}$$

$$AB = \sqrt{|1 - (-3)|^2 + |2 - (-6)|^2} = 4\sqrt{5}$$

$$\therefore S(t) = \frac{1}{2} \frac{t}{\sqrt{5}} [4\sqrt{5} + 2\sqrt{5}\sqrt{4-t}] = t[2 + \sqrt{4-t}]$$

$$S = \sqrt{4-t} \text{ とおくと } (0 < S < 2)$$

$$S = (4 - S^2)(2 + S) = -(S-2)(S+2)^2$$

$$\frac{dS}{dS} = -(S+2)(3S-2)$$

$$\therefore S \text{ は } S = \frac{2}{3} \text{ のとき、最大値 } \frac{32 \times 8}{9 \times 3} \text{ あり}$$

$$\text{したがって、} f(t) \text{ は、最大値 } \frac{8}{9} \text{ をもつ。}$$

(ここで、解と係数の関係)
 よ
 $\alpha + \beta = -2$
 $\alpha\beta = t-3$
 かつ
 $\alpha - \beta = \sqrt{(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta}$
 $= \sqrt{4-t}$

S	0	2	...	2
$\frac{dS}{dS}$	+	0	-	
S	↗		↘	

② (1) 与式は

$$z^5 + 2z^4 + 2^2 z^3 + 2^3 z^2 + 2^4 z + 2^5 = 0 \dots ①$$

に注意して (1) に $z=2$ を代入

$$2^6 - 2^6 = 0$$

とある。この解は

$$z = 2 \left(\cos \frac{2k\pi}{6} + i \sin \frac{2k\pi}{6} \right) \quad (k=0, 1, \dots, 5)$$

$$= \pm 2, \pm 1 \pm \sqrt{3}i \quad (\text{複号任意})$$

とあるが、 $z=2$ を除いて

$$z = -2, \pm 1 \pm \sqrt{3}i \quad (\text{複号任意})$$

(2) 一般に 3次方程式 $x^3 + ax + b = 0$ (a, b は整数)
が 整数解をもつとすれば、その解は

$$x = \pm (b \text{ の約数}) \dots (*)$$

とある。

$$(\text{証明}) \quad b = x(-x^2 - a)$$

とかけるので b は x を約数にもつ。よって、(*)が言える。

この主張に注意して (1) で与えた z に代入。条件を確認

$z = -2$ のとき

$$p = -2, \quad q = 0 \text{ より}$$

$$x^3 + 2 = 0 \Leftrightarrow (x + \sqrt[3]{2})(x^2 + \sqrt[3]{2}x + \sqrt[3]{4}) = 0$$

より 整数解はない。

$z = 1 + \sqrt{3}i$ のとき

$$p = 1, \quad q = \sqrt{3} \text{ より}$$

$$x^3 + 3x + 2 = 0 \dots ②$$

$f_1(x)$ とおく

上の主張より 整数解をもつとすれば $x = \pm 1, \pm 2$ だが、

$$f_1(1) = 6, \quad f_1(-1) = -2, \quad f_1(2) = 16, \quad f_1(-2) = -12$$

とあるので、②は 整数解をもたない。

$z = 1 - \sqrt{3}i$ のとき

$$p = 1, \quad q = -\sqrt{3} \text{ より}$$

$$x^3 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2(x+2) = 0$$

∴ 整数解をもつ。

$z = -1 + \sqrt{3}i$ のとき

$$p = -1, \quad q = \sqrt{3} \text{ より}$$

$$x^3 + 3x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x+1)(x^2 - x + 4) = 0$$

∴ 整数解をもつ

$z = -1 - \sqrt{3}i$ のとき

$$p = -1, \quad q = -\sqrt{3} \text{ より}$$

$$x^3 - 3x + 4 = 0 \dots ③$$

$f_2(x)$ とおく

上の主張より ③が 整数解をもつとすれば、

$$x = \pm 1, \pm 2, \pm 4$$

だが、

$$f_2(1) = 2 \quad f_2(2) = 6 \quad f_2(4) = 36$$

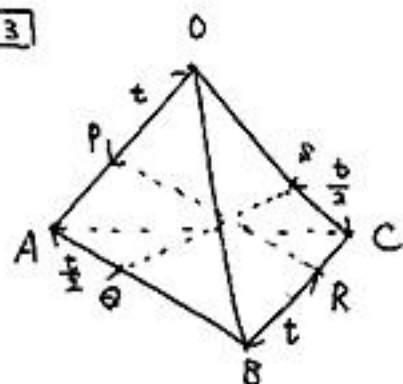
$$f_2(-1) = 6 \quad f_2(-2) = 2 \quad f_2(-4) = -28$$

とあるので ③は 整数解をもたない。

以上より 求めるものは

$$z = 1 - \sqrt{3}i, -1 + \sqrt{3}i$$

[3]



(1) 正四面体

$$\begin{cases} \vec{OP} = t\vec{OA} \\ \vec{OQ} = (1-\frac{t}{2})\vec{OA} + \frac{t}{2}\vec{OB} \\ \vec{OR} = (1-t)\vec{OC} + t\vec{OS} \\ \vec{OS} = (1-\frac{t}{2})\vec{OC} \end{cases}$$

(2) QS上の点KとXTの点Lを



$$\vec{OK} = s\vec{OS} + (1-s)\vec{OQ} \quad (0 \leq s \leq 1)$$

PR上の点LとXTの点Lを



$$\vec{OL} = u\vec{OR} + (1-u)\vec{OP} \quad (0 \leq u \leq 1)$$

$$\vec{OK} = \vec{OL} \text{ あり}$$

$$s\vec{OS} + (1-s)\vec{OQ} = u\vec{OR} + (1-u)\vec{OP}$$

$\Leftrightarrow$

$$s(1-\frac{t}{2})\vec{OC} + (1-s)\{(1-\frac{t}{2})\vec{OA} + \frac{t}{2}\vec{OB}\} = u\{(1-t)\vec{OC} + t\vec{OS}\} + (1-u)t\vec{OA}$$

$\Leftrightarrow$

$$\{(1-s)(1-\frac{t}{2}) - (1-u)t\}\vec{OA} + \{\frac{t}{2}(1-s) - u(1-t)\}\vec{OB} + \{s(1-\frac{t}{2}) - ut\}\vec{OC} = 0$$

ある。正四面体OABCより $\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}$ は一次独立なるから

$$\begin{cases} (1-s)(1-\frac{t}{2}) - (1-u)t = 0 \\ \frac{t}{2}(1-s) - u(1-t) = 0 \\ s(1-\frac{t}{2}) - ut = 0 \end{cases} \quad \therefore t = \frac{2}{3}, u = s = \frac{1}{3}$$

したがって

$$\begin{aligned} \vec{OL} &= \frac{1}{3}\vec{OR} + \frac{1}{3}\vec{OP} \\ &= \frac{1}{3}\vec{OA} + \frac{1}{6}\vec{OB} + \frac{1}{3}\vec{OC} \end{aligned}$$

また、またまた

$$\boxed{t = \frac{2}{3} \\ \vec{OL} = \frac{1}{3}\vec{OA} + \frac{1}{6}\vec{OB} + \frac{1}{3}\vec{OC}}$$

