



$-x^2+6=x \Leftrightarrow x^2+x-6=(x-2)(x+3)=0$
 より、A, Bの座標は $(-3, -3)$ $(2, 2)$ とする。
 よって Tは、

$$\begin{aligned} T &= \int_{-3}^2 (-x^2+6-x) dx = \int_{-3}^2 -(x-2)(x+3) dx \\ &= \left[-\frac{1}{2}(x-2)^2(x+3) + \frac{7}{6}(x-2)^3 \right]_{-3}^2 \\ &= -\frac{1}{6}(-3-2)^3 \\ &= \frac{125}{6} \end{aligned}$$

答 $\frac{125}{6}$

(2) $-x^2+6=x+t \Leftrightarrow x^2+x+(t-6)=0$ より、C, Dのx座標は $\frac{-1 \pm \sqrt{25-4t}}{2}$ である。
 $y=x+t$ は放物線 R と 2点で交わる必要があるので、 $0 < t < \frac{25}{4}$
 AB間 CD間の幅はそれぞれ AとB, CとDのx座標差の $\sqrt{2}$ 倍。
 よって $\begin{cases} AB=5\sqrt{2} \\ CD=\sqrt{50-4t} \end{cases}$ である。又、 $y=x$ と $y=x+t$ の2直線間の幅は t と表すことができる。

よって

$$S(t) = (5\sqrt{2} + \sqrt{50-4t}) \cdot \frac{t}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{2} = \frac{(5\sqrt{2} + \sqrt{50-4t})t}{2\sqrt{2}} = \frac{(5 + \sqrt{25-4t})t}{2}$$

$f(t) = \frac{S(t)}{t}$ の最大値は T一定より $S(t)$ の最大値を求めればわかる。

そこで、 $\sqrt{25-4t} = S$ (S 定数 $0 < S < 5$) とおくと、

$$25-4t = S^2 \Leftrightarrow t = \frac{25}{4} - \frac{1}{4}S^2 \text{ である。}$$

$$g(S) = (5 + \sqrt{25-4t})t = (5+S) \left(\frac{25}{4} - \frac{1}{4}S^2 \right) \text{ とおくと、}$$

$$g'(S) = -\frac{1}{4}(S+5)(S-5) \text{ より 増減表は 下図。}$$

S	0		5		5
$g'(S)$		+	0	-	
$g(S)$		↗	$\frac{500}{27}$	↘	

よって $g(S)$ は $S=\frac{5}{3}$ のときに最大値 $\frac{500}{27}$ をとる。

よって $S(t)$ は $S=\frac{5}{3}$ となる $t = \frac{50}{9}$ のとき最大値 $\frac{500}{27}$ をとる。

(1)より $T = \frac{125}{6}$ となるので、 $f(t)$ は、 $t = \frac{50}{9}$ のときに最大値

$$\frac{500}{27T} = \frac{8}{9} \text{ をとる。}$$

答 $t = \frac{50}{9}$ のとき 最大値 $\frac{8}{9}$ をとる。

$$(1) f(x, y) = \log_3(x+y) - \log_3 x - \log_3 y + 1 = \log_3 \frac{x+y}{x \cdot y} + 1$$

このとき、 $f(x, y) = 0$ であるためには

$$\log_3 \frac{x+y}{x \cdot y} = -1 \iff \frac{x+y}{x \cdot y} = \frac{1}{3} \text{ が必要}$$

これを变形して、

$$x \cdot y - 3x - 3y = 0 \iff (x-3)(y-3) = 9 \text{ である。}$$

x, y はそれぞれ 1~13 の整数なので、 $(x-3), (y-3)$ は -2~10 の整数である。これらの条件を満たす $(x-3), (y-3)$ は

$$\begin{cases} (x-3)=1 \\ (y-3)=9 \end{cases} \quad \begin{cases} (x-3)=9 \\ (y-3)=1 \end{cases} \quad \begin{cases} (x-3)=3 \\ (y-3)=3 \end{cases} \text{ の 3通り。}$$

よって x, y の組み合わせは

$$\text{答 } \begin{cases} x=4 \\ y=12 \end{cases} \quad \begin{cases} x=12 \\ y=4 \end{cases} \quad \begin{cases} x=6 \\ y=6 \end{cases}$$

(2)

52枚のカードから11順に2枚カードをとり出す方法は
52×51通り

11順に4, 12のカードをとり出す方法

4×4通り

11順に12, 4のカードをとり出す方法

4×4通り

11順に6, 6のカードをとり出す方法

4×3通り

よって $f(x, y) = 0$ となる確率は、

$$\frac{4 \times 4 + 4 \times 4 + 4 \times 3}{52 \times 51} = \frac{11}{663}$$

$$\text{答 } \frac{11}{663}$$

[3(a)]

$$(1) z = r(\cos \theta + i \sin \theta) \quad (r > 0) \text{ とおく.}$$

$$z^6 = r^6 (\cos 6\theta + i \sin 6\theta) \dots \textcircled{1}$$

$$\text{また, } 64 = 2^6 (\cos 0^\circ + i \sin 0^\circ) = \textcircled{2}$$

$$z^6 = 64 \text{ とおくと, } \textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ より}$$

$$\begin{cases} r = 2 \\ 6\theta = 360^\circ \times n \end{cases}$$

$$\therefore r = 2, \theta = 60^\circ \times n$$

$$n = 0, 1, 2, 3, 4, 5 \text{ を代入して}$$

$$z \rightarrow 2(\cos 0^\circ + i \sin 0^\circ), 2(\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ),$$

$$2(\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ), 2(\cos 180^\circ + i \sin 180^\circ)$$

$$2(\cos 240^\circ + i \sin 240^\circ), 2(\cos 300^\circ + i \sin 300^\circ)$$

$$\therefore z = 2, 1 + \sqrt{3}i, -(1 + \sqrt{3}i), -2, -(1 - \sqrt{3}i), 1 - \sqrt{3}i$$

$$(2) x^3 + \sqrt{3}x^2 + 2x - 2 = 0 \dots \textcircled{A}$$

$$i) z = 2 \text{ のとき}$$

$$\textcircled{A} \text{ は } x^3 - 2 = 0 \text{ となる.}$$

これは整数解を持たない.

$$ii) z = 1 + \sqrt{3}i \text{ のとき}$$

$$\textcircled{A} \text{ は } x^3 + 3x^2 + 2 = 0$$

$$f(x) = x^3 + 3x^2 + 2 \text{ とおく}$$

$$f'(x) = 3(x^2 + 1) > 0, f(x) \text{ は常に増加している.}$$

$$\text{また, } f(-1) = -2, f(0) = 2 \text{ より 整数解を持たない.}$$

$$iii) z = -(1 + \sqrt{3}i) \text{ のとき } \textcircled{A} \text{ は } x^3 - 3x^2 + 4 = 0$$

$$x = 1 \text{ のとき成立する.}$$

$$iv) z = -2 \text{ のとき } \textcircled{A} \text{ は } x^3 + 2 = 0 \text{ これは整数解を持たない.}$$

$$v) z = -(1 - \sqrt{3}i) \text{ のとき } \textcircled{A} \text{ は } x^3 - 3x^2 + 2 = 0$$

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2 \text{ とおく}$$

$$f'(x) = 3(x^2 - 1)$$

$$\text{最大値は } 2 \text{ より 整数解を持たない.}$$

$$vi) z = 1 - \sqrt{3}i \text{ のとき } \textcircled{A} \text{ は } x^3 + 3x^2 + 4 = 0$$

$$x = -1 \text{ のとき成立する.}$$

$$\therefore z = -(1 + \sqrt{3}i), 1 - \sqrt{3}i \text{ のとき成立する.}$$

[3(b)]

$$(1) AB = \begin{pmatrix} 1 & p \\ q & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & r \\ s & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+ps & p+r \\ q+s & qr+1 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & r \\ s & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & p \\ q & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+qr & p+r \\ q+s & ps+1 \end{pmatrix}$$

これより,

$$AB - BA = \begin{pmatrix} ps - qr & 0 \\ 0 & qr - ps \end{pmatrix} \text{ と表される. したがって } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ と}$$

等しいための条件は,

$$ps - qr = 1$$

$$(2) A^2B = AAB = \begin{pmatrix} 1 & p \\ q & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+ps & p+r \\ q+s & qr+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2ps+pq & 2p+r+pq+1 \\ 2q+s+pq+1 & pq+qr+1 \end{pmatrix}$$

$$BA^2 = BAA = \begin{pmatrix} 1+qr & p+r \\ q+s & ps+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & p \\ q & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2qr+pq & 2p+r+pq+1 \\ 2q+s+pq+1 & pq+ps+1 \end{pmatrix}$$

$$\text{より, } A^2B - BA^2 = \begin{pmatrix} 2ps - 2qr & 0 \\ 0 & 2qr - 2ps \end{pmatrix}$$

$$(1) \text{ が成立するとき } ps - qr = 1 \text{ となるので, } A^2B - BA^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \text{ となる}$$

$$A^3 - B^3 - (A - B)(A^2 + AB + B^2) = A^3 - B^3 - (A^3 - BA^2 + A^2B - BAB + AB^2 - B^3)$$

$$= -(A^2B - BA^2) + BAB - AB^2$$

$$\text{ここで上より, } (A^2B - BA^2) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{又 } BAB - AB^2 = -(AB - BA)B = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & r \\ s & 1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 & r \\ s & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -r \\ s & 1 \end{pmatrix}$$

よって

$$A^3 - B^3 - (A - B)(A^2 + AB + B^2) = -(A^2B - BA^2) + BAB - AB^2$$

$$= -\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -r \\ s & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -3 & -r \\ s & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{答 } \begin{pmatrix} -3 & -r \\ s & 3 \end{pmatrix}$$