

1

(1) 境界線は、

$$y = x^2 \quad \text{--- ①}$$

$$y = kx \quad \text{--- ②}$$

$$y = -x^2 + 2x \\ = -x(x-2) \quad \text{--- ③}$$

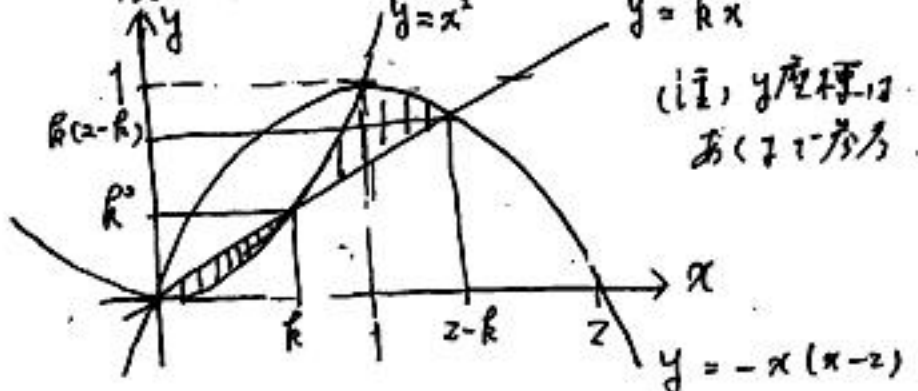
①, ② の交点は $(0, 0), (k, k^2)$

②, ③ の交点は $(0, 0), (2-k, k(2-k))$

③, ① の交点は $(0, 0), (1, 1)$

である。このことを注意して、

領域 $D \cup (E \cap F)$ は



この図の斜線部分。

よって、

$$G \text{ 上, } y \leq -x(x-2), y \geq kx, y \geq x^2$$

を成す領域を、

S_1, S_2, S_3 をそれぞれ

$D, E \cup F, G$ の面積を

すれば、 $m(k) = S_1 + S_2$ と、

$$S_1 = \int_0^k (kx - x^2) dx \\ = - \int_0^k x(x-k) dx = \frac{1}{6} k^3$$

$$S_1 + S_3 = \int_0^1 (-x(x-2) - x) dx \\ = -2 \int_0^1 x(x-1) dx \\ = \frac{2}{6} \cdot 1^3$$

$$S_2 + S_3 = \int_0^{2-k} (-x(x-2) - kx) dx \\ = - \int_0^{2-k} x(x-(2-k)) dx \\ = \frac{1}{6} (2-k)^3$$

$$m(k) = (S_2 + S_3) - (S_1 + S_3) + 2S_1 \\ = \frac{1}{6} (k^3 + 6k^2 - 12k + 6) \\ = \frac{1}{6} k^3 + k^2 - 2k + 1.$$

$$(2) m'(k) = \frac{1}{2} k^2 + 2k - 2 \\ = \frac{1}{2} (k^2 + 4k - 4)$$

$$= \frac{1}{2} (k - 2(-1-\sqrt{2}))(k - 2(-1+\sqrt{2}))$$

$$2(-1-\sqrt{2}) < 0 < 2(-1+\sqrt{2}) < 1$$

よって、

(増減)は

k	0	$2(-1+\sqrt{2})$	1
$m'(k)$	-	0	+
$m(k)$		極小	極大

よって $k = 2(\sqrt{2}-1)$ で最小となる。

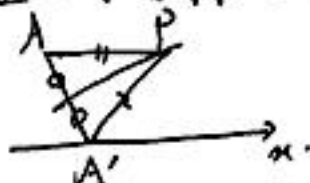
$m(k)$ は、 $\frac{1}{3} m'(k)$ とおくと

$$m(k) = (k+2) \cdot \frac{1}{3} m'(k) - \frac{4}{3} k + \frac{7}{3}$$

$$\text{よって } m(2(\sqrt{2}-1)) = \frac{-16(\sqrt{2}-1)+7}{3} = \frac{23-16\sqrt{2}}{3}$$

2

- (1) 「ピタリ直線」は線分 AA' の
垂直二等分線であるから



$$\text{条件は } AP = A'P$$

$$\Leftrightarrow AP^2 = A'P^2$$

$$\Leftrightarrow (p-2)^2 + (q-4)^2 = (p-1)^2 + q^2$$

$$\Leftrightarrow t^2 - 2pt + 4p + 8q - 20 = 0$$

(i) t の 2 次方程式 t として整理した

- (2) (1) の t の方程式から

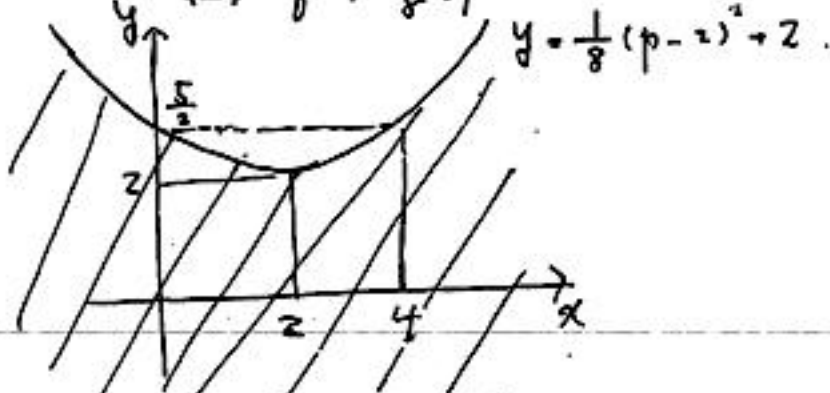
t の 異なる実数解をもつ条件を
を求める。

判別式 D について、

$$D/4 = p^2 - (4p + 8q - 20)$$

$$= (p-2)^2 - 8q + 16 > 0$$

$$\Leftrightarrow q < \frac{1}{8}(p-2)^2 + 2$$



斜線部が境界線は含めない。

- (3) t 本の「ピタリ直線」は

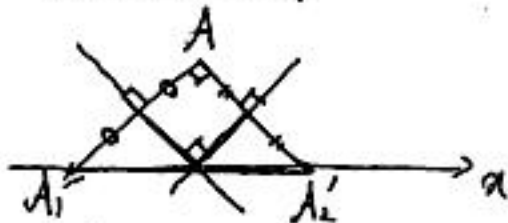
交点をもつ A' を、

$$A_1(t_1, 0), A_2(t_2, 0)$$

とすると、

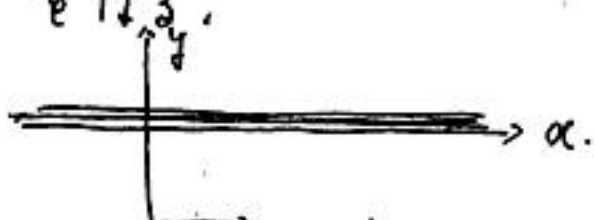
「ピタリ直線」は直交するから

t 本の線分 AA_1 と AA_2 は
直交するから



直角三角形 AA_1A_2 の斜辺の中点 P と
なるから、

- (2) で求めた範囲のうち、 x 軸上の
点 P 分、すなわち、 x 軸全体
となる。



- (i) $AA_1 \cdot AA_2 = 0$ の式

として $q = 0$ を導く。

3

(1) q_n は, n 回の試行後, 1 または 6 が底面にある確率である.

・ 1 回の試行後, 1 及び 6 は
側面にあるから

$$q_1 = 0$$

・ 側面に 1 及び 6 があるとき,
側面の数字の和は 14 である
から, 1 または 6 が底面と
なる確率は $\frac{1+6}{14} = \frac{1}{2}$

$$\text{よって, } q_2 = \frac{1}{2}$$

(2) $n-1$ 回めに 1 及び 6 が底面にあるとき.

このとき, n 回めには 1 または 6
は底面とはならない.

・ $n-1$ 回めに 1 及び 6 が側面にあるとき.

このとき, 次の 1 または 6 が
底面となる確率は $\frac{1}{2}$ である.

以上から

$$\begin{aligned} q_n &= q_{n-1} \cdot 0 + (1 - q_{n-1}) \cdot \frac{1}{2} \\ &= -\frac{1}{2} q_{n-1} + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\text{よって } q_n - \frac{1}{3} = -\frac{1}{2} (q_{n-1} - \frac{1}{3})$$

と変形すると, $\{q_n - \frac{1}{3}\}$ は等比

数列になるから

$$\begin{aligned} q_n - \frac{1}{3} &= (-\frac{1}{2})^n (q_0 - \frac{1}{3}) \\ &= (-\frac{1}{2})^n (1 - \frac{1}{3}) \end{aligned}$$

$$\text{よって } q_n = \frac{1}{3} (1 + 2(-\frac{1}{2})^n) \quad (n \geq 0)$$

(注) $q_0 = 1$ と解釈する.

(3) n 回めに底面に 1 がある事象は
底面に 1 または 6 があるうち,

$$\frac{1}{1+6} = \frac{1}{7} \text{ の割合で起こる.}$$

よって

$$\begin{aligned} p_n(1) &= \frac{1}{7} q_n \\ &= \frac{1}{7} (1 + 2(-\frac{1}{2})^n) \end{aligned} \quad (n \geq 1)$$

(注) 1 回めから試行する 1 の事象

173324 は $n \geq 0$
と仮定してよい.