

1

$$(1) (\log x)' = \frac{1}{x} \quad \tau\text{-あるから}$$

$x = t$ に代ると積分は

$$y - \log t = \frac{1}{t} (x - t)$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{1}{t} x - 1 + \log t$$

よって $(0, 0)$ を通る条件は

$$0 = -1 + \log t$$

$$\Leftrightarrow \log t = 1$$

$$\Leftrightarrow t = e^{b+1} \quad \text{これを代入し、}$$

求める方程式は

$$y = e^{-(b+1)} x + b$$

(2) B_n の y -座標を b_n とおく

$$A_n(e^{b_n}, b_n),$$

$$B_n(0, b_n) \quad (n \in \mathbb{N})$$

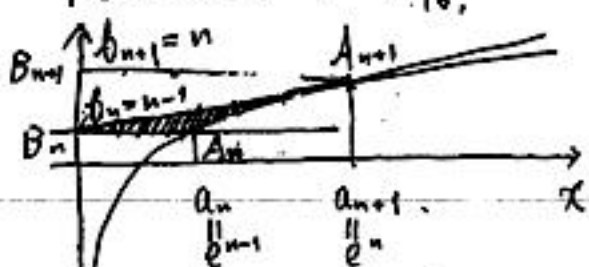
τ -ある.

(1) の結果から $b = b_n \in \tau$.

B_n を通る接線は

$$y = e^{-(b_n+1)} x + b_n \quad \tau\text{-ある}$$

接線 A_{n+1} の x -座標は $x = e^{b_n+1}$



$$\text{よって } b_{n+1} = \log e^{b_n+1} = b_n + 1$$

$\{b_n\}$ は $\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \dots$ と $b_1 = 0$

よって $b_n = n - 1 \quad (n \in \mathbb{N})$.

$A_n(e^{n-1}, n-1), B_n(0, n-1)$ である.

$$S_n = \int_{b_n}^{b_{n+1}} x dy = \Delta B_n A_{n+1} B_{n+1}$$

$$= \int_{n-1}^n e^y dy = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot e^n$$

$$= [e^y]_{n-1}^n = \frac{1}{2} e^n$$

$$= \frac{1}{2} e^n - e^{n-1}$$

$$= \left(\frac{e}{2} - 1\right) e^{n-1}$$

$$(3) T_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{e^k} \quad \tau\text{-ある.}$$

$$T_n = \sum_{k=1}^n \left(\frac{e}{2} - 1\right) \cdot k e^{-(k-1)}$$

$$U_n = \sum_{k=1}^n k e^{-(k-1)} \quad \tau\text{-ある.}$$

$$(1 - e^{-1}) U_n = \sum_{k=1}^n k e^{-(k-1)} - \sum_{k=1}^n k e^{-k}$$

$$= \sum_{k=1}^n k e^{-(k-1)} - \sum_{k=1}^{n+1} (k-1) e^{-(k-1)}$$

$$= 1 \cdot e^0 + \sum_{k=2}^n e^{-(k-1)} - n e^{-n}$$

$$= 1 + \frac{e^{-1} - e^{-n}}{1 - e^{-1}} - n e^{-n}$$

$$= \frac{1 - e^{-n}}{1 - e^{-1}} - n e^{-n}$$

$$\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - e^{-1}}$$

$$U_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (1 - e^{-1})^{-2} = \frac{e^2}{(e-1)^2}$$

$$\text{よって } \lim_{n \rightarrow \infty} T_n = \left(\frac{e}{2} - 1\right) \frac{e^2}{(e-1)^2}$$

2

$$(1) A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ かつ } \tau.$$

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_{n-1} \\ v_{n-1} \end{pmatrix} \quad (n \geq 2) \text{ かつ}$$

$$\text{帰納的に } \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = A^{n-1} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix}$$

$$(1 \leq n \leq 1, A^0 = E)$$

まず A^n を求める。

Hamilton-Cayley の定理より

$$A^2 - 0A + 3E = 0$$

$$\text{すなわち } A^2 = -3E \text{ となり、}$$

以下帰納的に、

・ n が偶数のとき

$$A^n = (-3)^{\frac{n}{2}} E$$

・ n が奇数のとき

$$A^n = (-3)^{\frac{n-1}{2}} A$$

かつ

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = A^{n-1} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix}$$

$$= A^{n-1} \left(3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

(2) $n \geq 2$ のとき、

・ n が奇数のとき

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} &= (-3)^{\frac{n-1}{2}} \left(3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= 3(-3)^{\frac{n-1}{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (-3)^{\frac{n-1}{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$(-3)^{\frac{n-1}{2}} \neq 0 \text{ かつ}$$

$$L_n: y = (-3)^{\frac{n-1}{2}}$$

・ n が偶数のとき

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} &= (-3)^{\frac{n}{2}-1} A \left(3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= (-3)^{\frac{n}{2}-1} \left(3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= (-3)^{\frac{n}{2}-1} \begin{pmatrix} 3-2 \\ 28-1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3 を消去して

$$2u_n + 3(-3)^{\frac{n}{2}-1} = v_n$$

よって

$$L_n: y = 2x - (-3)^{\frac{n}{2}}$$

よって

$$L_n: y = (-3)^{\frac{n-1}{2}} \quad (n: \text{奇数})$$

$$L_n: y = 2x - (-3)^{\frac{n}{2}} \quad (n: \text{偶数})$$

(2)

$$L_{2k-1}: y = (-3)^{k-1}$$

$$L_{2k}: y = 2x - (-3)^k \text{ かつ}$$

中心 $(0, (-3)^{k-1})$,

半径 1 , L_{2k} と L_{2k-1} の距離

を求めよ。

$$\frac{|2 \cdot 0 - (-3)^{k-1} - (-3)^k|}{\sqrt{2^2 + 1^2}}$$

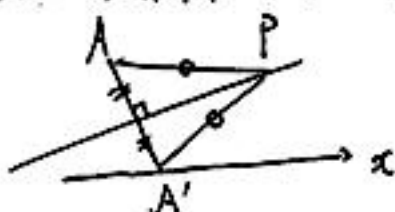
$$= \frac{|(-1+3)(-3)^{k-1}|}{\sqrt{5}} = \frac{2 \cdot 3^{k-1}}{\sqrt{5}}$$

求めるべき方程式は

$$x^2 + (y - (-3)^{k-1})^2 = \frac{4}{5} \cdot 9^{k-1}$$

3

(1) 「ピクチャリ直線」は線分 AA' の
垂直二等分線であるから、



条件は $AP = A'P$

$$\Leftrightarrow AP^2 = A'P^2$$

$$\Leftrightarrow (p-4)^2 + (q-2)^2 = (p-t)^2 + q^2$$

$$\Leftrightarrow t^2 - 2pt + 8p + 4q - 20 = 0$$

$t_1, t_2 \in [0, 6]$

(注) t の 2 次方程式として
整理した。

(2) (1) の t の方程式が

$0 \leq t \leq 6$ に 2 つの実数解をもつ条件を求めよ。

・判別式 D について

$$D/4 = p^2 - (8p + 4q - 20)$$

$$= (p-4)^2 - 4q + 4 > 0$$

$$\Leftrightarrow q < \frac{1}{4}(p-4)^2 + 1 \quad \text{--- ①}$$

・2 解 t_1, t_2 について

$0 \leq t_1, t_2 \leq 6$ の条件として

$$t_1 + t_2 = 2p \geq 0 \Leftrightarrow p \geq 0 \quad \text{--- ②}$$

$$t_1, t_2 = 8p + 4q - 20 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow q \geq -2p + 5 \quad \text{--- ③}$$

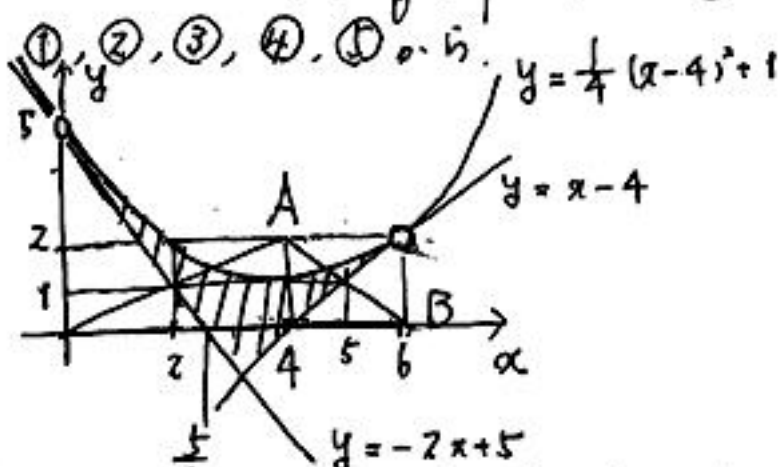
$$(6-t_1) + (6-t_2) = 12 - 2p \geq 0$$

$$\Leftrightarrow p \leq 6 \quad \text{--- ④}$$

$$(6-t_1)(6-t_2) = 36 - 6(t_1+t_2) + t_1t_2$$

$$= 36 - 6 \cdot 2p + 8p + 4q - 20 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow q \geq p - 4 \quad \text{--- ⑤}$$



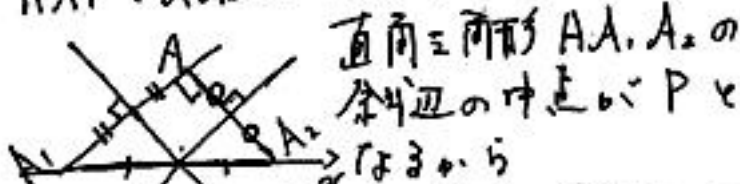
上図より、境界線の点放物線上に
あるものについてだけ含む。

(注) 2 つの直線は放物線と接する。

(3) 2 本のピクチャリ直線が直交するのは、

$A_1(t_1, 0), A_2(t_2, 0)$ として線分

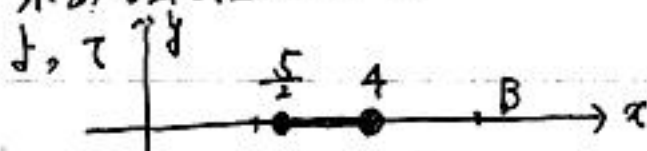
AA_1 と AA_2 が直交するとき。



直角三角形 AA_1A_2 の
斜辺の中点が P と

なるから

(2) の範囲のうち、x 軸上の部分のみ
求める範囲とする。



左端部分、右端点を含む。

(注) $\overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{AA_2} = 0$ の式から

$q = 0$ を導ける。

4

(1) g_n は n 回の試行後, 1 または 6 の
底面にある確率である.

・ $n-1$ 回めに底面に 1 または 6 があるとき, n 回めに 1 及び 6 は
側面にある.

・ $n-1$ 回めに側面に 1 及び 6 があるとき, 側面の数字の和は
14 であるから, 次の試行で
1 または 6 の側面となる確率は,
 $\frac{1+6}{14} = \frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned} g_n &= g_{n-1} \cdot 0 + (1 - g_{n-1}) \cdot \frac{1}{2} \\ &= -\frac{1}{2} g_{n-1} + \frac{1}{2} \quad (n \geq 1) \end{aligned}$$

以上は 1, 6 の代わりには
2, 5 または 3, 4 としても
同様であるから

$$\begin{aligned} r_n &= -\frac{1}{2} r_{n-1} + \frac{1}{2} \\ s_n &= -\frac{1}{2} s_{n-1} + \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (n \geq 1)$$

も成り立つ.

また, $g_0 = 1, r_0 = 0, s_0 = 0$
と表せる.

$\{g_n\}$ の漸化式は,

$$g_n - \frac{1}{3} = -\frac{1}{2} (g_{n-1} - \frac{1}{3})$$

と表すことができ, $\{g_n - \frac{1}{3}\}$ は
等比数列となる.

$$\begin{aligned} g_n - \frac{1}{3} &= (-\frac{1}{2})^n (g_0 - \frac{1}{3}) \\ &= (-\frac{1}{2})^n (1 - \frac{1}{3}) \end{aligned}$$

$$g_n = \frac{1}{3} (1 + 2(-\frac{1}{2})^n) \quad (n \geq 0)$$

同様に

$$r_n - \frac{1}{3} = (-\frac{1}{2})^n (0 - \frac{1}{3})$$

$$s_n - \frac{1}{3} = (-\frac{1}{2})^n (0 - \frac{1}{3})$$

$$r_n = \frac{1}{3} (1 - (-\frac{1}{2})^n) \quad (n \geq 0)$$

$$s_n = \frac{1}{3} (1 - (-\frac{1}{2})^n) \quad (n \geq 0)$$

(2) 底面に 1 である事象は

底面に 1 または 6 である事象は

$$\frac{1}{1+6} = \frac{1}{7} \text{ の割合で起る.}$$

他にも同様にすると,

$$p_{n(1)} = \frac{1}{7} g_n = \frac{1}{21} (1 + 2(-\frac{1}{2})^n)$$

$$p_{n(2)} = \frac{2}{7} r_n = \frac{2}{21} (1 - (-\frac{1}{2})^n)$$

$$p_{n(3)} = \frac{3}{7} s_n = \frac{1}{7} (1 - (-\frac{1}{2})^n)$$

$$p_{n(4)} = \frac{4}{7} s_n = \frac{4}{21} (1 - (-\frac{1}{2})^n)$$

$$p_{n(5)} = \frac{5}{7} r_n = \frac{5}{21} (1 - (-\frac{1}{2})^n)$$

$$p_{n(6)} = \frac{6}{7} g_n = \frac{2}{7} (1 + 2(-\frac{1}{2})^n)$$

($n \geq 1$)

(注) 1 回めから試行する場合は上の通り,
 $n \geq 0$ とはしてよい.