

1

A について、ケーリー・ハミルトンの等式

$$A^2 - (a+d)A + adE = O$$

が成り立っている。

$$\begin{cases} a+d=p \\ ad=q \end{cases} \quad \text{とおくと, } A^2 = pA - qE \text{ である.}$$

実数全体の集合を $\mathbb{R}$ とかく。

$$(1) \quad A^2 = E$$

$$\iff pA - qE = E$$

$$\iff pA = (q+1)E$$

・ $A = kE$ ($k \in \mathbb{R}$) と表せないとき,

$$\begin{cases} p=0 \\ q=-1 \end{cases} \iff \begin{cases} a+d=0 \\ ad=-1 \end{cases}$$

であるが, このような $a, d \in \mathbb{R}$ は存在しない。

・ $A = kE$ ($k \in \mathbb{R}$) と表せるとき,

$$A^2 = E$$

$$\iff (k^2 - 1)E = O$$

$$\iff k^2 = 1$$

$$\iff k = \pm 1$$

以上から, $A = \pm E$

$$(2) \quad A^3 = E$$

$$\iff A(pA - qE) = E$$

$$\iff p(pA - qE) - qA = E$$

$$\iff (p^2 - q)A = (pq + 1)E$$

・ $A = kE$ ($k \in \mathbb{R}$) と表せないとき,

$$\begin{aligned} \begin{cases} p^2 = q \\ pq = -1 \end{cases} &\iff \begin{cases} p^3 = pq \\ pq = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} p^3 = -1 \\ pq = -1 \end{cases} \\ \iff \begin{cases} p = -1 \\ q = 1 \end{cases} &\iff \begin{cases} a+d = -1 \\ ad = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

であるが, $t^2 + t + 1 = 0$ は実数解をもたないから, このような $a, d \in \mathbb{R}$ は存在しない。

・ $A = kE$ ($k \in \mathbb{R}$) と表せるとき,

$$A^3 = E$$

$$\iff (k^3 - 1)E = O$$

$$\iff k^3 = 1$$

$$\iff k = 1$$

以上から, $A = E$

$$(3) \quad A^4 = E$$

$$\iff (pA - qE)^2 = E$$

$$\iff p^2(pA - qE) - 2pqA + q^2E = E$$

$$\iff p(p^2 - 2q)A + (q(q - p^2) - 1)E = O$$

・ $A = kE$ ($k \in \mathbb{R}$) と表せないとき,

$$\begin{cases} p(p^2 - 2q) = 0 \\ q(q - p^2) = 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} p=0 \\ q(q-p^2)=1 \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} p^2=2q \\ q(q-p^2)=1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} p=0 \\ q^2=1 \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} p^2=2q \\ -q^2=1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} p=0 \\ q=\pm 1 \end{cases} \quad (\text{後者をみたす } q \in \mathbb{R} \text{ は存在しない})$$

$$\iff \begin{cases} a+d=0 \\ ad=\pm 1 \end{cases}$$

$t = a, d$ のみたす 2 次方程式 $t^2 \pm 1 = 0$ は負号のときのみ 2 実数解

・ $A = kE$ ($k \in \mathbb{R}$) と表せるとき,

$$A^4 = E$$

$$\iff (k^4 - 1)E = O$$

$$\iff k^4 = 1$$

$$\iff k^2 = 1$$

$$\iff A^2 = E$$

以上から, $A^2 = E$

$$\text{＜注＞ } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2

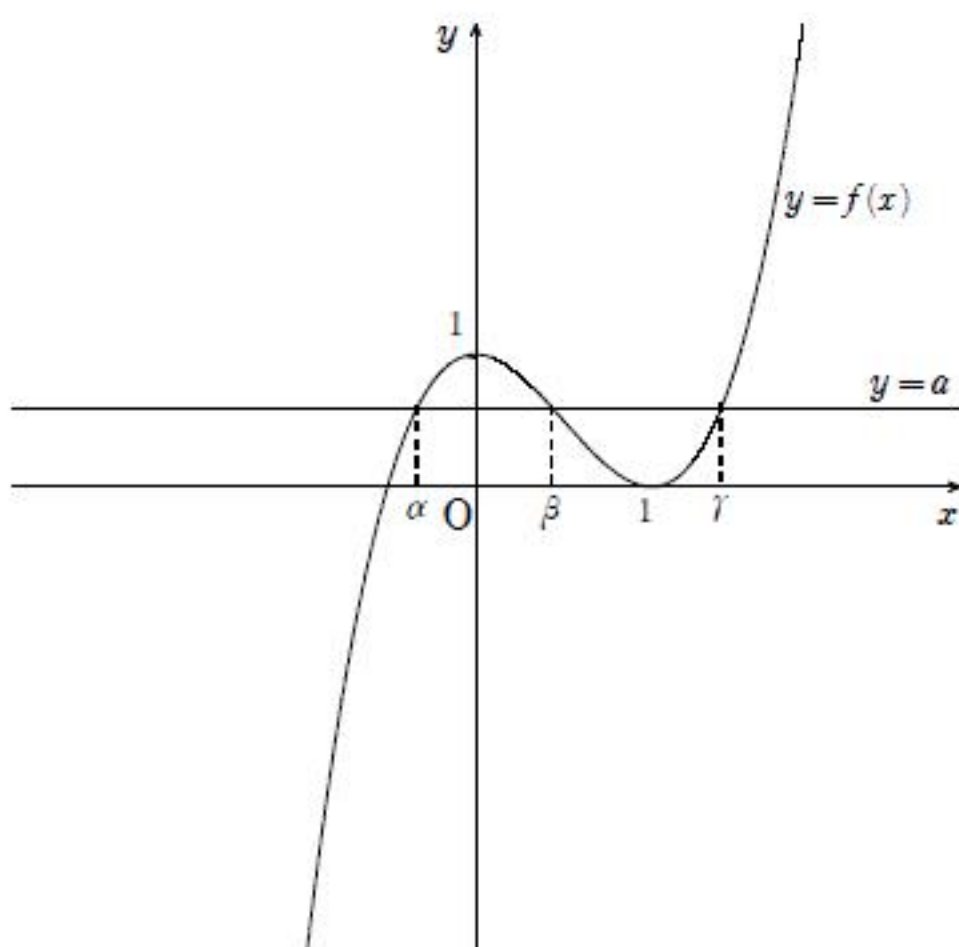
(1) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$ について,

$$f'(x) = 6x^2 - 6x = 6x(x-1)$$

x		0		1	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

$$f(0) = 1, f(1) = 0$$

また, $f(x) = (x-1)^2(2x+1)$ にも注意して, グラフは以下の通り。



(2) $f(x) - a = 0$ の3実解が $x = \alpha, \beta, \gamma$ であるから

$$f(x) = 2(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$$

と表せて, この2次, 1次の係数を比較できて

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = \frac{3}{2} \\ \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 0 \end{cases}$$

が成り立つ。これより

$$\begin{cases} \alpha + \gamma = \frac{3}{2} - \beta \\ \alpha\gamma = -\beta(\alpha + \gamma) = -\beta\left(\frac{3}{2} - \beta\right) \end{cases}$$

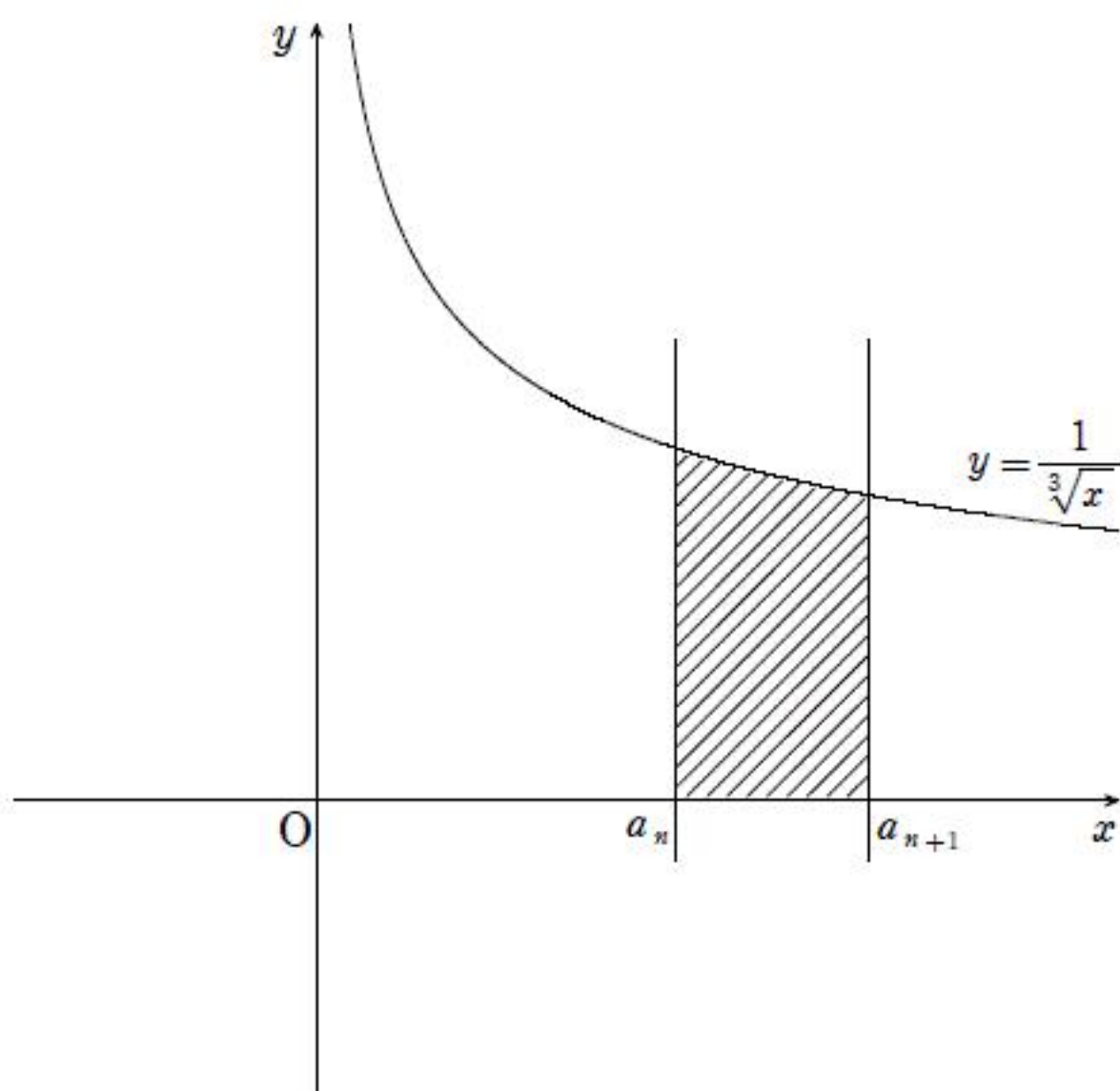
$$\begin{aligned} l^2 &= (\gamma - \alpha)^2 \\ &= (\gamma + \alpha)^2 - 4\gamma\alpha \\ &= \left(\frac{3}{2} - \beta\right)^2 + 4\beta\left(\frac{3}{2} - \beta\right) \\ &= 3\left\{1 - \left(\beta - \frac{1}{2}\right)^2\right\} \end{aligned}$$

$l > 0$ であるから

$$l = \sqrt{3} \sqrt{1 - \left(\beta - \frac{1}{2}\right)^2}$$

(3) $f(x) = a$ の実数解は, $y = f(x)$, $y = a$ の共有点の x 座標に対応し, これが異なる3つとなるのは $0 < a < 1$ のときで, $0 < \beta < 1$ となる。

$$\text{このとき } \frac{3}{4} < 1 - \left(\beta - \frac{1}{2}\right)^2 \leq 1 \text{ よって } \frac{3}{2} < l \leq \sqrt{3}$$



$$\begin{aligned}
 V_n &= \pi \int_{a_n}^{a_{n+1}} x^{-\frac{2}{3}} dx \\
 &= \pi \left[3x^{\frac{1}{3}} \right]_{a_n}^{a_{n+1}} \\
 &= 3\pi \left(a_{n+1}^{\frac{1}{3}} - a_n^{\frac{1}{3}} \right)
 \end{aligned}$$

一方

$$\begin{aligned}
 1 &= \int_{a_n}^{a_{n+1}} x^{-\frac{1}{3}} dx \\
 &= \left[\frac{3}{2} x^{\frac{2}{3}} \right]_{a_n}^{a_{n+1}} \\
 &= \frac{3}{2} \left(a_{n+1}^{\frac{2}{3}} - a_n^{\frac{2}{3}} \right)
 \end{aligned}$$

であるから

$$a_{n+1}^{\frac{2}{3}} - a_n^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}$$

となり, $\{a_n\}$ は等差数列で

$$\begin{aligned}
 a_n^{\frac{2}{3}} &= a_1^{\frac{2}{3}} + (n-1) \cdot \frac{2}{3} \\
 &= \frac{1}{3}(2n+1)
 \end{aligned}$$

$$a_n = \left(\frac{2n+1}{3} \right)^{\frac{3}{2}}$$

となる。

$$\begin{aligned}
 V_n &= 3\pi \left\{ \left(\frac{2n+3}{3} \right)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{2n+1}{3} \right)^{\frac{1}{2}} \right\} \\
 &= \sqrt{3}\pi (\sqrt{2n+3} - \sqrt{2n+1}) \\
 \sqrt{n}V_n &= \sqrt{3}\pi \cdot \sqrt{n} (\sqrt{2n+3} - \sqrt{2n+1}) \\
 &= \sqrt{3}\pi \cdot \sqrt{n} \frac{(2n+3) - (2n+1)}{\sqrt{2n+3} + \sqrt{2n+1}} \\
 &= \sqrt{3}\pi \frac{2}{\sqrt{2+\frac{3}{n}} + \sqrt{2+\frac{1}{n}}} \\
 &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sqrt{3}\pi \cdot \frac{2}{\sqrt{2} + \sqrt{2}} \\
 &= \sqrt{\frac{3}{2}}\pi
 \end{aligned}$$

よって

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n}V_n = \sqrt{\frac{3}{2}}\pi$$

4(a)

(1) 2 接点を $(\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2)$ とおくと, 2 接線は

$$\begin{cases} \alpha_1 x + \beta_1 y = 1 \\ \alpha_2 x + \beta_2 y = 1 \end{cases}$$

であり, これらが $P(x_0, y_0)$ を通るから

$$\begin{cases} \alpha_1 x_0 + \beta_1 y_0 = 1 \\ \alpha_2 x_0 + \beta_2 y_0 = 1 \end{cases}$$

これは, 2 接点が直線 $x_0 x + y_0 y = 1$ 上の点であることを表す。

2 接線は異なるから, 2 接点は異なり, この直線は 2 接点を結ぶ直線として 1 本に定まっている。

一方, 図形は直線 OP に関して対称である。 $OP: x_0 y - y_0 x = 0$ であり

$Q(x_1, y_1)$ はこれら 2 直線の交点として

$$\begin{pmatrix} x_0 & y_0 \\ -y_0 & x_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を満たす。

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{x_0^2 + y_0^2} \begin{pmatrix} x_0 & -y_0 \\ y_0 & x_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ = \frac{1}{x_0^2 + y_0^2} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

すなわち

$$Q(x_1, y_1) = \left(\frac{x_0}{x_0^2 + y_0^2}, \frac{y_0}{x_0^2 + y_0^2} \right)$$

またこの等式は

$$\overrightarrow{OQ} = \frac{1}{|\overrightarrow{OP}|^2} \overrightarrow{OP}$$

とみることができ

$$|\overrightarrow{OQ}| = \frac{1}{|\overrightarrow{OP}|} \quad \text{すなわち} \quad OP \cdot OQ = 1 \quad \text{である。}$$

(2) $\overrightarrow{OP} \parallel \overrightarrow{OQ}$ かつ $|\overrightarrow{OP}| \cdot |\overrightarrow{OQ}| = 1$ であるから, P, Q の座標を入れかえ

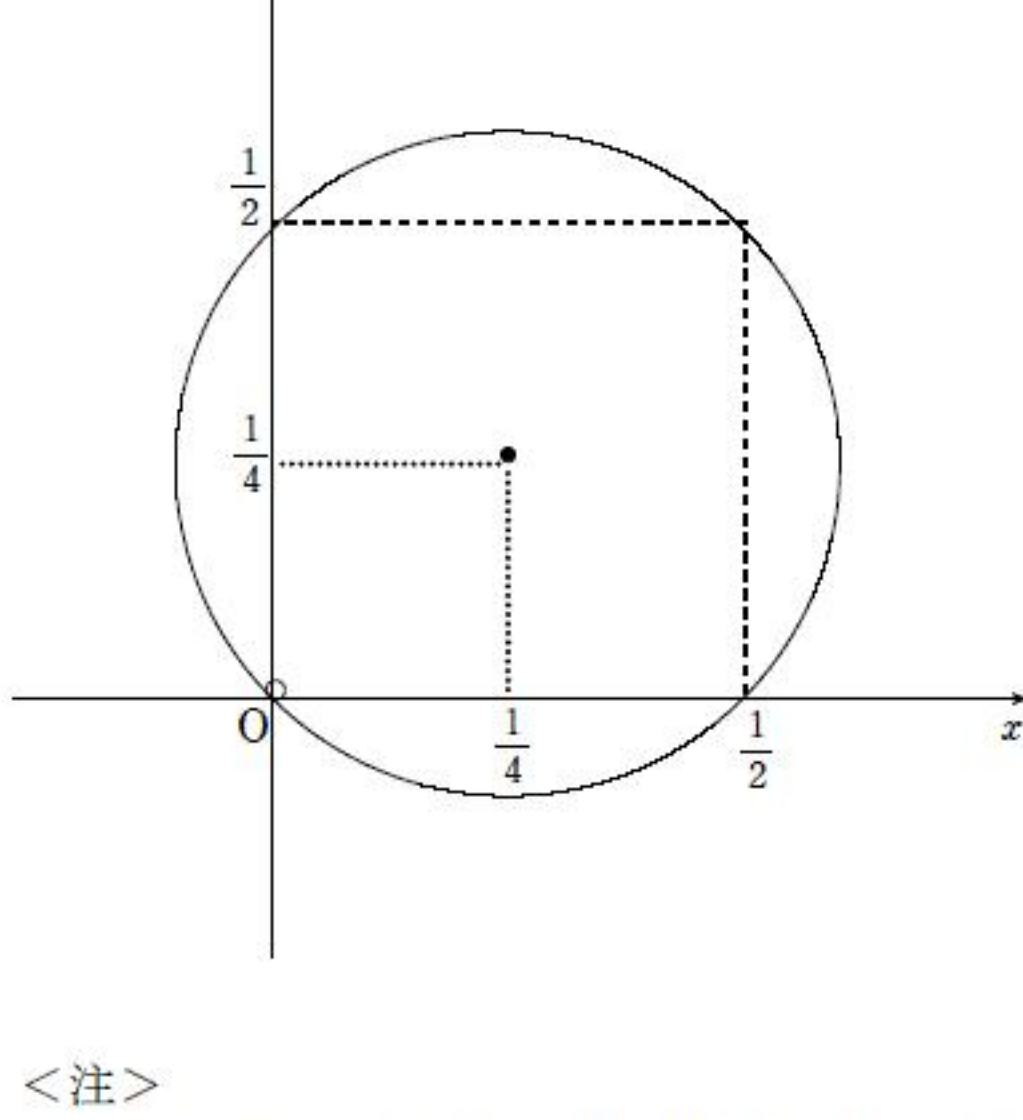
ても同じ関係が成り立ち

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \frac{1}{x_1^2 + y_1^2} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

となる。よって

$$\begin{aligned} x_0 + y_0 = 2 &\iff \frac{x_1 + y_1}{x_1^2 + y_1^2} = 2 \\ &\iff x_1^2 + y_1^2 - \frac{1}{2}(x_1 + y_1) = 0 \\ &\quad \text{かつ} \quad x_1^2 + y_1^2 \neq 0 \\ &\iff \left(x_1 - \frac{1}{4}\right)^2 + \left(y_1 - \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{8} \\ &\quad \text{かつ} \quad (x_1, y_1) \neq (0, 0) \end{aligned}$$

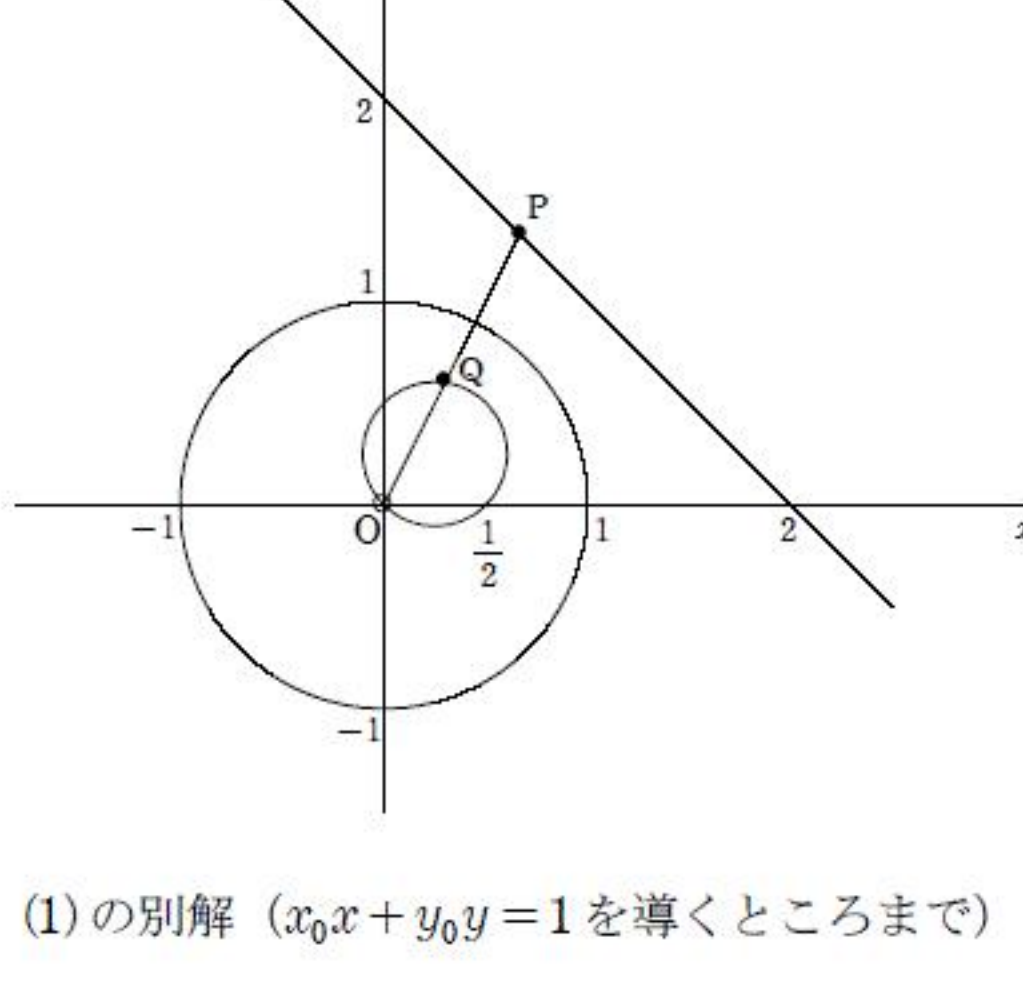
よって, 軌跡は中心 $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$, 半径 $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ の円から, $(0, 0)$ を除いた部分である。



<注>

$P \rightarrow Q$ は単位円に関する反転と呼ばれる変換である。

位置関係も含めて図示すると下図のようになる。



(1) の別解 ($x_0 x + y_0 y = 1$ を導くところまで)

OP を直径とする円を考えると, これと単位円との交点 A は

$\angle OAP = \frac{\pi}{2}$ を満たし, 直線 AP は単位円の A における接線となる。

円の方程式は

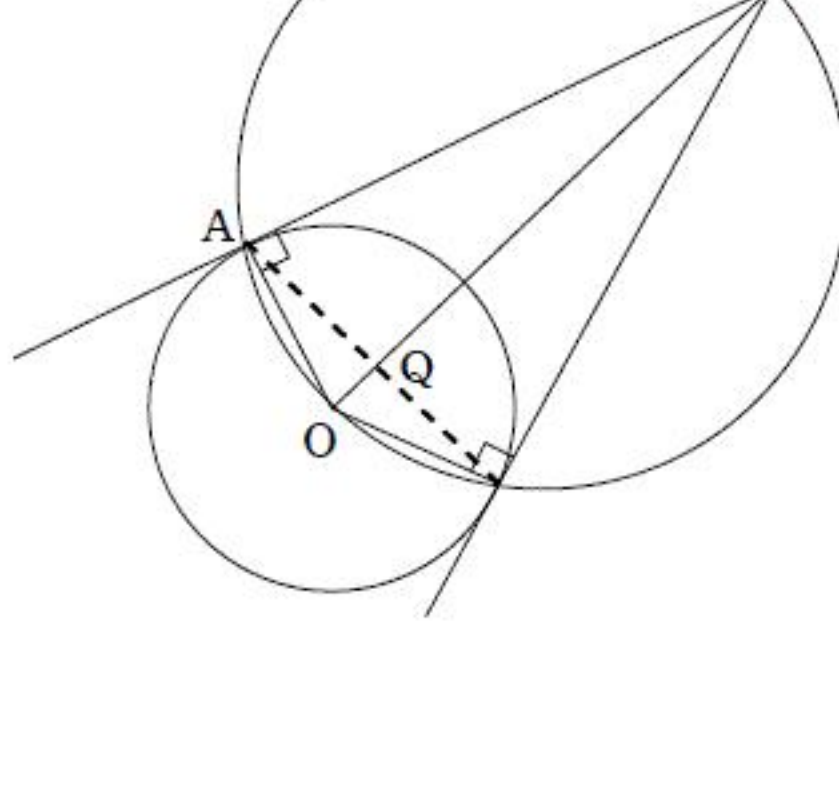
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} = 0$$

から

$$x^2 + y^2 - (x_0 x + y_0 y) = 0$$

これと, $x^2 + y^2 = 1$ との辺々の差を考えて, 2 接線を結ぶ直線は

$x_0 x + y_0 y = 1$ とわかる。



4(b)

(1) 赤玉を R , 他を S で表す。操作を 3 回行った後

・ R が 1 個あるのは, SSS と取るときで,

$$p_3(1) = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{3 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{2}{5}$$

・ R が 2 個あるのは, $\begin{pmatrix} RSS \\ SRS \\ SSR \end{pmatrix}$ と取るときで

$$\begin{aligned} p_3(2) &= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{2 \cdot 1 \cdot 3}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{2 \cdot 3 \cdot 1}{3 \cdot 4 \cdot 5} \\ &= 3 \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{3 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{2 \cdot 3}{4 \cdot 5} = \frac{3}{10} \end{aligned}$$

・ R が 3 個あるのは, $\begin{pmatrix} RRS \\ RSR \\ SRR \end{pmatrix}$ と取るときで

$$\begin{aligned} p_3(3) &= \frac{1 \cdot 2 \cdot 2}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 2}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{2 \cdot 1 \cdot 2}{3 \cdot 4 \cdot 5} \\ &= 3 \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 2}{3 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{1}{5} \end{aligned}$$

・ R が 4 個あるのは, RRR と取るときで

$$p_3(4) = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{3 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{1}{2 \cdot 5} = \frac{1}{10}$$

よって

$$p_3(1) : p_3(2) : p_3(3) : p_3(4)$$

$$= \frac{2}{5} : \frac{3}{10} : \frac{1}{5} : \frac{1}{10}$$

$$= 4 : 3 : 2 : 1$$

(2) N 回の操作のあと, R が m 個となるのは, N 回中 $m-1$ 回 R をとる

ときで, 取り方の順を表す RS の順列は

$${}_N C_{m-1} = \frac{N!}{(m-1)!(N-m+1)!} \quad (\text{通り})$$

ある。このとき, 玉の総数は

$3, 4, \dots, N+2, N+3$ (個)

と, 1 ずつ増加し, R の数は R を取るごとに

$1, 2, \dots, m-1, m$ (個)

S の数は S を取るごとに

$2, 3, \dots, N-m+2, N-m+3$ (個)

とそれぞれ 1 ずつ増加する。

したがって, 特定の順列によって取るときの確率は, (操作直前の玉の数をみて)

$$\frac{(m-1)!(N-m+2)!}{\frac{(N+2)!}{2!}} = \frac{2(m-1)!(N-m+2)!}{(N+2)!}$$

と計算され, 順列の数も考えて

$$p_N(m) = \frac{2(m-1)!(N-m+2)!}{(N+2)!} \cdot \frac{N!}{(m-1)!(N-m+1)!}$$

$$= \frac{2(N-m+2)}{(N+2)(N+1)}$$

<注>

確率は操作直前の玉の数で定まるが, 総数を混乱しないため, 操作後の玉の数を記しておくのがよい。

数 C の範囲である「条件付確率」の考えを用いることも考えられるが, 一応数 A の範囲で完結するように書いた。